EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
AMERSFOORT

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. C. DE JONG,
LEIDEN

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

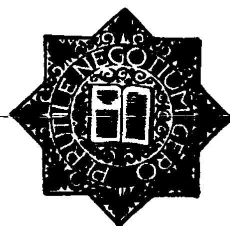
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. W. P. THIJSEN
BANDOENG

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

13e JAARGANG 1936/37, Nr. 1.



P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde f 5.—, voor id. op Christiaan Huygens f 4.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—, voor idem op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) *f* 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

AB of $\overline{AB}$?

§ 1. Op blz. 19 van het eerste deeltje van mijn Meetkundige vraagstukken staat het volgende.

„Voor we verder gaan, zullen we eens precies zeggen, wat met AB kan worden bedoeld.

1. AB stelt de rechte lijn voor door A en B;
2. AB betekent het lijnstuk met de eindpunten A en B;
3. AB stelt de lengte van het lijnstuk van A tot B voor, zonder dat we daarbij aan een aantal eenheden behoeven te denken; b.v. voor $\triangle$ ABC geldt AB + AC > BC.
4. AB stelt het aantal lengte-eenheden voor van het lijnstuk AB; als een rechthoek tot zijden heeft AB en AD, is de oppervlakte AB $\times$ AD." Ten einde alle twijfel op te heffen wordt, waar nodig zeker, waar niet nodig toch dikwijls, het paar hoofdletters voorafgegaan door hetgeen daar ter plaatse er mee bedoeld wordt, evenals zulks gewoonte is, als men spreekt over een halve lijn. Steeds wordt er voor gezorgd, dat misvatting door de leerlingen uitgesloten is.

Ik geef onmiddellijk toe, dat er weinig of geen onderscheid is tussen de derde en de vierde betekenis; ze zijn gegeven uit didactisch oogpunt; bij 3 kan men met de passer volstaan; bij 4 is het beslist rekenwerk. In de derde en vierde betekenis vervange men, waar mogelijk, de twee hoofdletters door één kleine letter. In de eenvoudige schoolvraagstukken is dat in 9 van de 10 gevallen zeker te doen; ik zou b.v. in geen geval voor de oppervlakte van een trapezium, waarvan AB // DC en DE $\perp$ AB is, schrijven $\frac{1}{2}\,\overline{DE}.\,(\overline{AB}+\overline{DC})$, maar in figuur en uitwerking $\frac{1}{2}h(a+b)$.

Over de eerste betekenis behoeven we niets te zeggen. We voegen er aan toe, dat we de lijn AB, als A en B opvolgende hoekpunten van een driehoek of van een veelhoek zijn, aanduiden als de *zijlijn* AB; dit ene woord maakt de formulering van heel wat stellingen eenvoudiger, b.v.:

Als een transversaal de zijlijnen AB, BC en CA van $\triangle$ ABC opv. snijdt in P, Q en R, is

$$\frac{PA}{PB} \times \frac{QB}{QC} \times \frac{RC}{RA} = 1.$$

De deellijn van de buitenhoek bij A van een driehoek ABC snijdt de zijlijn BC in een punt D zo, dat DB : DC = c : b.

De voetpunten van de loodlijnen uit een punt P van de omgeschreven cirkel op de zijlijnen van driehoek ABC liggen op een rechte lijn.

In de tweede betekenis is het lijnstuk AB de verzameling punten tussen A en B; daarbij wordt in het geheel niet gedacht aan enig maatbegrip, zoals in de derde (en vierde) betekenis. We nemen een voorbeeld: de meetkundige plaats van de toppen P van stomphoekige gelijkbenige driehoeken met basis AB bestaat uit twee lijnstukken; de lezer vulle de rest aan. De eindpunten behoren niet tot de meetkundige plaats; als M het midden is van AB en de andere eindpunten C en D, bestaat de meetkundige plaats uit de lijnstukken CM en MD, waarbij vermeld moet worden, dat C, M en D er niet toe behoren. Een van de voornaamste (en voor leerlingen mede zeer instructieve) dingen is, dat men precies aangeeft of beide, een of geen eindpunten tot de puntverzameling behoren. F o r d e r[1]) heeft daar de volgende notaties voor: C |—| *M*, C —*M*, C |—*M*, C — *M*; achtereenvolgens: aan beide zijden gesloten lijnstuk (interval, verzameling); bij C open, bij *M* gesloten; bij C gesloten, bij *M* open; aan beide zijden open; volgens F o r d e r zijn ze van P e a n o. Deze notaties zijn zeer goed en er is niet de minste reden voor, om er wat anders voor in de plaats te stellen.

Ook iets voor de school? Ik zou zeggen: laten we die notaties bewaren voor een leerboek, maar laat ze weg in een schoolboek; *laat de zaak zelf niet weg,* b.v. het lijnstuk EF met eindpunt E, zonder F; de boog ASC, A en C beide inbegrepen. Zo iets te onderscheiden en na te gaan, is veel beter voor de ontwikkeling van de jonge mensen, die ons worden toevertrouwd, dan in veertig gevallen te bewijzen, dat twee driehoeken congruent zijn of de constructie van $\sqrt[8]{a^8 + b^8}$. Voor de school zou ik zeggen: de letters naast elkaar zonder teken, maar met de bijvoeging: lijnstuk, dus b.v. het lijnstuk GH en als het vraagstuk er aanleiding toe geeft: het lijnstuk GH, G inbegrepen, H niet.

Bij de derde (en vierde) betekenis heeft men aan het lijnstuk AB het maatbegrip verbonden; in de vierde wat sterker dan bij de derde. Moeten we dit door een teken aanwijzen?

---

[1]) The Foundations of Euclidean Geometry by Henry George Forder, B. A. Cambridge University Press 1927; 343 blz.

We willen eens nagaan, wat geleerde onderzoekers op het gebied van de grondslagen van de Euclidische meetkunde zeggen en doen. We kunnen zeker zijn, dat elk woord bij hen betekenis heeft en dat het al of niet gebruiken van notaties zeer zeker een punt van ernstige overweging heeft uitgemaakt.

Hilbert[2]) zegt: „Wir betrachten auf einer Geraden *a* zwei Punkte A und B; wir nennen das System der beiden Punkte A und B eine *Strecke* und bezeichnen dieselbe mit AB oder BA. Die Punkte zwischen A und B heiszen Punkte der Strecke AB oder auch *innerhalb* der Strecke."

„Gerade", „Strecke" steeds wordt gezegd, welke figuur er wordt bedoeld met twee naast elkaar staande hoofdletters; als verwarring volstrekt uitgesloten is, wordt de naam weggelaten, b.v.: „Wenn für zwei Dreiecke ABC en A′B′C′ die Kongruenzen AB $\equiv$ A′B′, ... gelten, so sind die beiden Dreiecke einander Kongruent." Zodra Hilbert overgaat tot „Streckenrechnung" gebruikt hij daarvoor kleine letters, b.v. bij de evenredigheid van lijnstukken (onze 3e en 4e betekenis).

Forder schrijft in het reeds genoemde boek:

„*Defs.* If A, B be distinct points the „line AB" is the set of points in de sequence AB (dat is: de punten A en B en de punten P, die met A en B in de volgorde [PAB], [APB] of [ABP] liggen). The „*open interval*" AB is the set of points X in order AXB. The „*closed interval*" is the set of all points of the open interval AB together with A and B. — The line AB may be denoted by AB simply and in future AB will always mean the line AB." Hoe de vier vormen van lijnstukken AB worden aangewezen, hebben we reeds gezegd. Zo definieert hij een driehoek als volgt: „If A, B, C do not colline, the „*triangle*" ABC, or △ ABC is the set of points on A⊢⊣B, B⊢⊣C, C⊢⊣A. A, B, C are the „*vertices*", B — C, C — A, A — B the „*sides*", B ⊢⊣ C etc. the „*side intervals*", and BC, etc. the „*side lines*" of the triangles. (Hier vind ik zo waar het door mij bedachte woord *zijlijn*!) Note carefully that a *side of a triangle does not include its ends.*" Voor een uitgebreid wetenschappelijk werk, zo pijnlijk streng, is dit alles te loven en te prijzen.

Natuurlijk gaat hij later over naar de betekenis onder 3 (en 4) in de aanhef vermeld. Dus vinden we verder:

---

[2]) Grundlagen der Geometrie von Dr. David Hilbert. Vierte Auflage, B. G. Teubner 1913.

„*Def.* „The „measure" of an interval AB, written μ AB, is the set of all intervals congruent to AB; or alternatively it may be regarded as a distinctive common property of these intervals (interval = lijnstuk.)" Later gebruikt hij dezelfde Griekse letter om de maat van een hoek en van een boog aan te geven. Inderdaad maakt strenge doorvoering van een systeem van notaties dit al even noodzakelijk.

Prof. Van der Waerden zegt in zijn reeks artikelen over de logische grondslagen van de Euklidische meetkunde (Chr. Huygens Jg. XIII en XIV):

„Het lijnstuk of lijnsegment PR bestaat uit alle punten Q tussen P en R". In § 7, die tot titel heeft: „Het afpassen van lijnstukken en hoeken. Het postulaat van Eudoxos" komen eerst een viertal stellingen en aan het eind daarvan: „Wij duiden voortaan lijnstukken door kleine letters aan". Door de stellingen over grootte-relaties van lijnstukken, gaat Van der Waerden over naar de derde (en vierde) betekenis. Een afzonderlijke notatie wordt niet gebruikt; waarschijnlijk, omdat er geen behoefte aan is en steeds ten volle uitkomt, wat er bedoeld wordt. We moeten er bij zeggen, dat het artikel „leesbaar" is en voor ieder, die onderwijs moet geven op H.B.S. of Gymnasium, gelezen moet worden niet alleen, maar zeer degelijk moet worden bestudeerd, iets wat ik van „Forder" [1]) niet zou durven eisen.

Iedere collega is zich volkomen bewust van de drie betekenissen (3e en 4e dan samen genomen) van de letterverbinding AB; de tijd is nu wel volkomen voorbij, dat men een lijn middendoor deelt en de middelevenredige construeert van twee lijnen! In elk vraagstuk is duidelijk, of men met de eerste, met de tweede of met de derde te maken heeft. De laatste komt overwegend meer voor dan de eerste twee; de „meetkunde", zoals die op school wordt gegeven, is immers voor een zeer groot deel de algebra van lijnstukken in diverse figuren, vooral in driehoeken (tot vervelens toe).

Is er reden toe, de verschillende betekenissen te onderscheiden

---

[1]) Een veertig jaar geleden kocht ik eens een partijtje oude wiskundeboeken. Daarin bevond zich de Boldriehoeksmeting van Verdam; een vroegere gebruiker had er voorin geschreven: „Wie dit boek doorwerkt, gaat Job zoowel in geduld als in lijden te boven". Van „Forder" kan hetzelfde gezegd worden. Wie echter diepgaande studie wil maken van de grondslagen, kan zich niets fijners voorstellen.

door een of andere notatie? Ik deed het tot heden niet; H i l b e r t en V a n d e r W a e r d e n hebben er zich ook niet druk over gemaakt; wat F o r d e r doet is een schitterend voorbeeld van fijne onderscheidingen, die door de hele omvangrijke studie angstvallig worden volgehouden. Voor de school kunnen we er weinig of niets van gebruiken; een enkele notatie wel voor een studieboek, zoals reeds gezegd.

Er zijn een paar schoolboeken, die wel notaties gebruiken. Laten we het een en ander er van overnemen.

S c h o g t zegt in zijn „Beginselen der Vlakke Meetkunde" (blz. 4): „De verzameling der punten van de rechte lijn AB, die tussen A en B liggen, heet het lijnstuk $\overline{AB}$". In § 111 zegt hij: Men kent aan elk lijnstuk een getal toe, de *lengte* van dat lijnstuk geheeten. De lengte van het lijnstuk $\overline{AB}$ zullen we aanduiden door $l\ (\overline{AB})$. In § 126 zegt Schogt verder: De evenredigheid $\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{EF} : \overline{XY}$ is eene verkorte schrijfwijze voor $l\ (\overline{AB}) : l\ (\overline{CD}) = l\ (\overline{EF}) : l\ (\overline{XY})$. Daarna wordt de notatie $l\ (\overline{AB})$ losgelaten en b.v. geschreven: $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - 2\ \overline{AB} \times \overline{AC}$.

Dr. H a a l m e ij e r zegt op blz. 4 van zijn schoolboek: „Onder een lijnstuk verstaat men een stuk van een lijn, gelegen tussen twee zijner punten. Het lijnstuk gelegen tussen de punten A en B zullen we aangeven door $\overline{AB}$". In § 87 zegt Haalmeijer verder: Tot nog toe bedoelden we met $\overline{AB}$ (of met a) een lijnstuk, dus een *meetkundige figuur*. In het volgende zullen we met $\overline{AB}$ (of met a) vaak aangeven de lengte van een lijnstuk, dus een *getal*. Dit zal niet altijd speciaal vermeld worden, maar we hopen steeds voldoende te doen blijken, wat bedoeld wordt." H a a l m e ij e r gebruikt dus dezelfde notatie voor de betekenissen 2 en 3 (en 4); als S c h o g t zijn $l\ (\overline{AB})$ overboord gooit, dan deze ook. H a a l m e ij e r werkt wat meer met kleine letters, als hij getallen bedoelt, evenals ik dat altijd al gedaan heb.

Wat voor voordeel heeft het te schrijven:

$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2$ in plaats van $AB^2 = CB^2 + CA^2$? Ik zeg te *schrijven*, want bij mijn weten is er geen verschil bij het uitspreken. Is het antwoord: „dat de lezers er aan herinnerd worden, dat met $\overline{AB}$ een lijnstuk of een getal als lengte van een lijnstuk wordt

bedoeld."? Wie dat echter niet ziet zonder het streepje, doet beter zijn boek voor goed dicht te slaan.

Er is echter meer, dat er voor pleit, om AB te zetten in plaats van $\overline{AB}$. Precies dezelfde betekenissen 1, 2 en 3 (en 4) heeft men immers ook bij de cirkel en de cirkelbogen; noch bij S c h o g t, noch bij H a a l m e ij e r zie ik een spoor van enige notatie voor de verschillende begrippen; als ze het ene doen, mogen ze m.i. het andere niet laten en dan moeten ze alle bogen ook op een of andere manier aanduiden, evenals alle lijnstukken.

§ 3. In de schoolmeetkunde zullen we ook een bescheiden begin moeten maken met „vectoren", gerichte lijnstukken dus (in de 8e druk van M o l e n b r o e k, Leerboek der Vlakke Meetkunde, die in bewerking is, las ik een klein hoofdstuk in over vectoren en zwaartepunten). Men komt vanzelf tot gerichte lijnstukken, als men de stellingen van M e n e l a o s en C e v a behandelt, de in- en uitwendige gelijkvormigheidspunten bepaalt op de lijn $M_1 M_2$, in een lijnstuk de gulden snede aanbrengt en ook op de betekenis van de negatieve wortel van de vierkantsvergelijking wijst. Bij verscheidene stellingen en vraagstukken, vooral ook over meetkundige plaatsen, komt men ongemerkt op gerichte lijnstukken, zo is het m.i. minder goed, als men het omgekeerde van de stelling van C e v a als volgt formuleert:

Als op de rechte lijnen BC, CA en AB, waarvan de zijden van △ ABC deel uitmaken, resp. punten A′, B′ en C′ liggen, met dien verstande, dat hetzij een dier punten op ene zijde der driehoeken ligt, hetzij dit met alle drie het geval is en als bovendien de betrekking bestaat $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$, *dan gaan de rechte lijnen AA′, BB′ en CC′ door één punt of zijn evenwijdig.* (S c h o g t, blz. 104). Angstvallig wordt het begrip *vector* vermeden; de stelling worde als volgt onder woorden gebracht: *Liggen op de zijlijnen AB, BC, CA van △ ABC opv. de punten P, Q en R en is* $\dfrac{PA}{PB} \times \dfrac{QB}{QC} \times \dfrac{RC}{RA} = -1$, *dan gaan CP, AQ en BR door één punt of zijn evenwijdig.* Een voordeel bovendien is, dat de formulering kort is en niet stroef loopt.

Het wordt m.i. hoog tijd, dat we een begin maken met vectoren in de meetkunde, vooreerst enkel nog maar met vectoren op een

rechte lijn, dus met AB + BA = 0; AB + BC + CA = 0.

In de andere wiskundige vakken: algebra, driehoeksmeting en beschrijvende meetkunde (coördinaten van een punt) om van mechanica en natuurkunde maar niet te spreken, zijn toch tegengestelde getallen en tegengestelde richtingen schering en inslag. Waarom er in de vlakke meetkunde gans en al over te zwijgen? Het begin heb ik gemaakt in verschillende schoolboeken, heel voorzichtig aan; langzaam maar zeker wordt verder gegaan.

Een pleidooi voor verruiming van inzicht door invoering van vectoren is geen onderdeel van een artikel over notaties; dus het weinige, dat er van gezegd is, breken we hier af. Maar wel komt er daardoor een vijfde betekenis van AB bij en dienen we de vraag onder de ogen te zien of we hiervoor een notatie zullen gebruiken of niet. We zouden een notatie uit de mechanica kunnen overnemen (eenheid van notatie is daar echter helemaal niet!), maar ook kunnen zeggen, dat de zeer bijzondere vectoren op een zelfde rechte lijn (of op evenwijdige lijnen) deze onnodig maken. Vooral ook, omdat gelijk reeds gezegd is en wat ook Dr. Haalmeijer in zijn boek zegt, de bedoeling in elk voorkomend geval volkomen duidelijk is en zo er misvatting zou kunnen zijn, de schrijver het zich tot plicht heeft gerekend, duidelijk te laten uitkomen, wat hij bedoelt. Bij geen van de drie hooggeleerde schrijvers, hierboven genoemd, vinden we de relatie AB + BA = 0, dus ook geen notatie; vectoren behoren niet tot de meetkunde van Euclides en komen in de grondslagen dus niet ter sprake. Wel schenkt Forder volle aandacht aan: „Sense on a line", maar ik vind de betrekking AB + BA = 0 niet.

Het denkbeeld en de uitwerking en de volle toepassing van AB + BA = 0 is van Möbius; de eerste bladzijde van zijn werk: Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, begint als volgt:

„§ 1. Vorerinnerung. Die Bezeichnung eines Theils einer geraden Linie durch Nebeneinanderstellung der zwei Buchstaben, womit man die Grenzpunkte desselben benannt hat, soll hier nicht allein als Ausdruck für den absoluten Werth des Theils gebraucht werden, sondern zugleich durch die verschiedene Stellung der Buchstaben angeben, ob dieser Werth, nach der einmal festgesetzten positiven Richtung der Linie, als positiv oder negativ zu betrachten ist.

Ein Punkt kann sich nämlich in einer geraden Linie nach zwei verschiedenen Richtungen bewegen, von denen die eine der andern entgegengesetzt ist. Die eine dieser Richtungen heisse die positive, die andere die negative. Sind nun A und B beliebige zwei Punkte einer geraden Linie, so verstehe man unter dem Ausdrucke AB den Werth des zwischen A und B enthaltenen Theils der Linie, positiv oder negativ genommen, je nachdem ein in der Linie fortgehender Punkt, um von dem, in dem Ausdrucke zuerst gesetzten, Punkte A zu dem nachfolgenden B zu gelangen, sich in der positiven oder negativen Richtung bewegen muss.

Hiernach ist also immer: $AB + BA = 0$; und wenn C einen dritten Punkt derselben Geraden bedeutet, mag dieser dritte Punkt zwischen A und B, oder ausserhalb, auf der Seite von A oder der Seite von B liegen:

I. $BC + CA + AB = 0$,

II. $CB - CA = AB$, u. s. w.

Bei zwei verschiedenen geraden Linien ist die positive Richtung der einen von der der andern im Allgemeinen ganz unabhängig. Sind sich aber die Linien parallel, so wollen wir, nach Festsetzung der positiven Richtung der einen, die der andern so bestimmen, dass, wenn die andere parallel mit sich fortbewegt wird, bis sie mit der erstern Linie zusammenfällt, sie dann beide auch hinsichtlich der positiven Richtung identisch sind.

Sind daher A, B, C, D die vier auf einander folgenden Spitzen eines Parallelogramms, so hat man $AB = DC$ und $BC = AD$, dagegen $AB + CD = 0$ und $BC + DA = 0$."

Prof. De Vries opent jg. 24 van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (Sept. 1936) met het volgende:

„1. Deze studie, begrijpelijk voor ieder die op het gebied der Analytische Meetkunde niet volslagen onkundig is, heeft een paedagogische strekking; zij moet den gezichtskring van den lezer verruimen, en zijn inzicht verdiepen.

Wij beginnen met het maken van de afspraak, dat wij bij het noemen van een lijnstuk zullen letten op de volgorde der letters, BA dus als een ander lijnstuk beschouwen dan AB, en het ene positief in rekening brengen, het andere negatief, zodat:

$$AB + BA = 0$$

Deze afspraak is even natuurlijk als de andere, waarbij wij op de volgorde der letters niet letten, en schrijven:

$$AB + BA = 2AB = 2BA.$$

In dit laatste geval vragen wij, hoeveel meters wij hebben afgelegd op onze wandeling van A naar B en terug, in het eerste, hoe ver wij, na beëindiging van onze wandeling, van het punt van uitgang verwijderd zijn. De tweede onderstelling geldt in het dagelijks leven, de eerste echter is onmisbaar voor de Wiskunde, indien men de formules algemene geldigheid wil verschaffen, en ze onafhankelijk wil maken van de figuren; immers dat $AB + BC = AC$ is, is volgens de tweede onderstelling slechts juist, indien C buiten AB, en dan nog wel aan de kant van B ligt; volgens de éérste onderstelling geldt zij steeds, hoe ook de drie punten ten opzichte van elkaar gelegen mogen zijn. In plaats van $AB + BC = AC$ kan men ook zeggen:

$$AB + BC + CA = 0.$$

De lezer mijner vroegere „Historische Studiën" (vgl. Deel II, p. 58) weet, dat de formule $AB + BA = 0$, of althans de gedachte die aan deze formule ten grondslag ligt, afkomstig is van Kästner, maar in de Wiskunde definitief is ingevoerd door Möbius, in de aanhef van zijn „Barycentrischen Calcul" van het jaar 1827.

Wij willen niet nalaten op te merken dat de formule:

$$AB + BC + CA = 0$$

een aantal jaren later, nl. in 1844, door Möbius zelf, maar ook door anderen, o.a. Bellavitis en Grassmann, is toegepast op drie punten, die niet meer in een rechte lijn liggen, maar een driehoek vormen. Wandelt men de driehoek rond in de richting ABC, dan is men ook na afloop van de wandeling weer in het punt van uitgang terug, en kan dus opnieuw schrijven:

$$AB + BC + CA = 0.$$

Hieruit volgt: $AB + BC = AC$,

en AC heet dan de „meetkundige som" van AB en BC. Verder gaande kan men dan schrijven:

$$AB = AC - BC,$$

waarbij C ieder punt van het vlak kan zijn, bijv. óók wel kan samenvallen met A of B. Ligt C in A, dan vindt men:

$$AB = - BA,$$

en ligt C in B, dan vindt men:

$$AB = AB.$$

Deze opmerking, nl. dat C ieder punt van het vlak kan zijn, heeft Möbius op het idee gebracht, dit punt maar weg te laten en dus te schrijven:

$$AB = A - B,$$

waardoor de formule:

$$AB + BC + CA = 0$$

overgaat in de identiteit:

$$A - B + B - C + C - A = 0,$$

en dus een symbolische rekenwijze met punten ontstaat. Van het standpunt van de driehoek uit gezien, wordt dan de figuur, bestaande uit drie punten op een rechte lijn, een plat gedrukte driehoek."

Notaties? We vinden ze niet; blijkbaar was er geen behoefte en is die er nog niet; inderdaad kunnen we er best buiten; we kunnen het dan ook gevoeglijk laten bij gerichte hoeken; $\angle (l, m) + \angle (m, l) = 0$ of $k\pi$, wat uit te breiden is tot meer termen; bij hoeken en bogen komt echter al spoedig wat meer kijken. Voor drie collineaire punten A, B en C geldt $AB + BC + CA = 0$, voor drie punten A, B en C op een cirkel $AB + BC + CA = 2\,k\pi$.

Tot slot dus:

1. AB stelt de rechte lijn voor door A en B;

2. AB stelt het lijnstuk voor tussen A en B, met een of twee of wel zonder eindpunten;

3. AB stelt de lengte voor van het lijnstuk tussen A en B (dit is 3 en 4 van blz. 1);

4. AB stelt een gericht lijnstuk op een lijn l voor, zodat AB het tegengestelde is van BA.

Bij 3 en 4 is er natuurlijk geen toevoeging als bij 2; voor 2 en 3 een extra notatie te gebruiken is niet nodig; voor 4 evenmin; pijltjes voor 4 zijn niet doelmatig, b.v. $\overrightarrow{AB}$; men stuit al direct op $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$, waarbij het pijltje de indruk geeft, dat beide lijnstukken naar rechts gericht zijn, wat net niet de bedoeling is.

Maar waarom zouden we op de verschillende volgorde van de letters nog eens de aandacht moeten vestigen door tekens?

Uit het verband, waarin het symbool AB optreedt, blijkt, welke betekenis er aan wordt toegekend. In de derde betekenis is het gewoonte AB te vervangen door één kleine letter; ook in de eerste, maar dan meestal door *l*, *m*, *n*, *p*, *q*; men wijst een punt aan met één letter, een vlak met één letter, een cirkel met één letter, een kromme met één letter, *K* bv.; de rechte lijn als grondfiguur dan ook. Ik heb nog nimmer gezien, dat verwarring ontstond doordat een zelfde kleine letter werd gebruikt ter aanduiding van een lijn, van een lijnstuk, van een hoek of wat anders; evenmin, dat men in de onzekerheid verkeerde omtrent het begrip, dat met AB wordt aangeduid.

Nodig zijn notaties niet; nuttig? Als men ze alle vier onderscheidde, misschien. Dat wordt echter niet gedaan, terwijl geen enkele onderscheiding bij cirkelbogen wordt gemaakt.

Aan het eind gekomen, moet ik dus zeggen, dat ik er geen voorstander van ben om $\overline{AB}$ te zetten in plaats van AB in de derde betekenis en tegenstander er van om die in de tweede betekenis te gebruiken. Gaarne geef ik het woord echter aan hen, die het niet met mij eens zijn.

P. W.

HISTORISCHE REVUE

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

O. Neugebauer. *Mathematische Keilschrift-Texte.* Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abteilung A. Quellen. Band III. *Erster Teil. Texte.* XII en 516 blz. *Zweiter Teil. Register. Glossar, Nachträge, Tafeln.* 64 blz. en 69 tafels. Berlin (Springer) 1935. R.M. 128.

In dit werk, dat voor afzienbaren tijd de grondslag zal blijven, waarop alle bestudeering van de Babylonische wiskunde zal moeten rusten, wordt een volledige verzameling gegeven van alle tegenwoordig bekende spijkerschriftteksten met wiskundigen inhoud, hetzij deze reeds eerder gepubliceerd waren, hetzij ze door den bewerker met het oog op deze uitgave zijn ontcijferd. Het doel is daarbij geweest, de teksten voor iedereen, die in het onderwerp belangstelt, zóó toegankelijk te maken, dat hij, zonder Assyrioloog te zijn, de interpretatie tot in details zal kunnen volgen. Dat doel is bereikt door ze (met uitzondering van getallentafels, die slechts naar typen ingedeeld zijn) alle zoowel in photographie als in autographie te reproduceeren (voorzoover dit niet reeds elders geschied is) en er een transcriptie, een vertaling en een commentaar van te geven. Door deze handelwijze in jarenlangen arbeid consequent en met de uiterste nauwkeurigheid toe te passen, heeft Prof. Neugebauer een bronnenwerk tot stand gebracht, dat aan de hoogst denkbare eischen van volledigheid en betrouwbaarheid voldoet. Dank zij zijn voorlichting kan men de Babylonische wiskunde thans leeren kennen met een graad van exactheid, die nog voor geen andere historische periode kan worden bereikt.

We danken dit resultaat aan de gelukkige combinatie van uitzonderlijke begaafdheid en onuitputtelijke werkkracht, die Prof. Neugebauer bezit. Want inderdaad mag het uitzonderlijk heeten,

dat iemand aan een zoo scherp mathematisch inzicht, als waarvan hij telkens weer blijk geeft, een zoo volledige beheersching van de Oostersche talen en een zoo diepe vertrouwdheid met de antieke cultuur paart, als hij voor het voltooien van dit werk noodig heeft gehad. Het is in onzen tijd van vakspecialiseering geen gewoonte meer, om een dergelijke veelzijdigheid op haar volle waarde te schatten; de meeste philologen en archaeologen sluiten het wiskundige werk van de oude volkeren buiten den kring van hun belangstelling en onder wiskundigen wordt de beteekenis van het historisch onderzoek naar de ontwikkeling van hun vak nog veelal niet ten volle beseft. Daardoor wordt een man als Prof. Neugebauer door geen van beide categorieën op de plaats gezien, die hij voor beide verdient. Op den duur zal echter ongetwijfeld algemeen worden erkend, dat iemand, die een werk als het hier besprokene kan volbrengen, tot de eerste wetenschappelijke figuren van onzen tijd moet worden gerekend.

We vermelden nog, dat de uitgave ook uiterlijk aan de hoogste eischen voldoet. Dit kan eenigszins verzoenen met den wel zeer hoogen prijs.

C. de Waard. *Correspondance du P. Marin Mersenne, religieux minime.* Vol. I (1617—1627). Paris (*Beauchesne*) 1932.

Het heeft altijd tot de plannen van Paul Tannery, den grooten Franschen historicus der wis- en natuurkundige wetenschappen, behoord, om nog eens een volledige uitgave tot stand te brengen van de uitvoerige briefwisseling, die Mersenne met een groot aantal tijdgenooten, waaronder talrijke wetenschappelijke figuren van den eersten rang, heeft onderhouden. Steeds er naar strevende, zich te verplaatsen in het denken van de historische perioden, die hij bestudeerde, steeds er op bedacht, de intellectueele atmospheer te reconstrueeren, waarin de nieuwe denkbeelden ontstonden en tot ontwikkeling kwamen, moest hij wel groote waarde hechten aan de brieven van een man, die in een tijd, toen er nog geen academies en geen tijdschriften waren, om die atmospheer te scheppen en te conserveeren, door zijn veelzijdige correspondentie op zekere hoogte de functies van beide vervulde. Helaas heeft zijn ontijdige dood in 1904 de uitvoering van dit plan, zooals van vele andere, verijdeld; zijn echtgenoote heeft zich echter tot taak gesteld, zijn werk zoo-

veel mogelijk tot voltooiïng te brengen en ze heeft zich daarbij de volle medewerking weten te verwerven van onzen landgenoot C. de Waard, die door zijn ongemeene vertrouwdheid met de wetenschappelijke cultuur van de 17e eeuw daartoe wel de aangewezen man was.

Na jarenlange voorbereiding begint thans langzamerhand het resultaat van die medewerking het licht te zien. Het eerste deel der briefwisseling, de jaren 1617—1627 omvattend, is verschenen; het tweede zal niet meer lang op zich laten wachten en de volhardende werkkracht van den Vlissingschen historicus staat er borg voor, dat hij, menschelijkerwijs gesproken, ook de vele deelen, die dan nog moeten volgen, tot stand zal brengen. Daarmee zal een zeer belangrijk werk voor de geschiedenis van de wis- en natuurkundige wetenschappen en daardoor van de cultuur der 17e eeuw verricht zijn.

Het behoeft wel nauwelijks gezegd te worden, dat de uitgave aan alle eischen van volledigheid en betrouwbaarheid voldoet, die men in onzen tijd aan een onderneming als deze kan stellen.

Fritz Schmidt, *Geschichte der geodätischen Instrumente und Verfahren im Altertum und Mittelalter.* Veröffentlichungen der Pfälzischen Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften. Band XXIV. Neustadt an der Haardt 1936. 400 blz. en 26 tafels.

Dit boek bevat een overzicht van de geschiedenis van alle belangrijke instrumenten, die van de oudste tijden af tot aan het einde der middeleeuwen toe (en in vele gevallen zelfs nog lang daarna) voor de practische toepassingen der geometrie, dus in letterlijken zin voor de „meet"-kunde, hebben gediend. Het is een van die zorgvuldig aangelegde verzamelingen van historische gegevens op een zeer speciaal gebied, die van den auteur een jarenlang voortgezetten opofferenden speurdersarbeid vereischten, maar die hem dan ook den dank verzekeren van allen, die bij hun studie wel eens van die gegevens gebruik moeten maken en voor wie het onmogelijk zou zijn, ze zelfstandig op te sporen. Dat zal bij dit werk niet zelden voorkomen, omdat het behandelde onderwerp voor historici van verschillende richtingen van belang is. Het is natuurlijk in de eerste plaats van fundamenteele beteekenis voor de wiskunde; niet eens zoozeer, omdat het de practische zijde leert kennen van een

vak, dat men anders, ook historisch, vrijwel uitsluitend van den theoretischen kant beschouwt, maar veeleer, omdat de primitieve geodetische methoden psychologisch belangrijke inzichten geven in de vroege stadia van wiskundig denken, met name in de eerste ontwikkeling van de quantitatieve beschouwingswijze (b.v. de rechte hoek als grootheid inplaats van als liggingsrelatie). Het is verder van principieele waarde voor de geschiedenis van het meten in het algemeen en daardoor voor allen, die belangstellen in de ontwikkeling van physica en techniek. En het kan van belang worden voor de algemeene cultuurgeschiedenis, wanneer deze aan technische aangelegenheden de aandacht gaat schenken, die ze verdienen.

De schrijver heeft zich beperkt tot zuiver geodetische instrumenten en methoden; hij behandelt dus noch zuiver geometrische constructies, noch specifiek astronomische meetwerktuigen; zoo wordt b.v. van het astrolabium alleen die kant behandeld, die voor metingen van afstanden en hoeken op aarde is ingericht, dus niet de keerzijde, die voor astronomische doeleinden dient. Het werk is dus naar twee zijden voor een voor de hand liggende uitbreiding vatbaar; voor één van deze, de meetkundige constructies betreffend, is die voortzetting zelfs al aangekondigd. Het zou echter zeer toe te juichen zijn, indien ze in beide richtingen tot stand kwam; de bronnen, die voor dit werk bestudeerd zijn, leveren natuurlijk ook reeds een ruim materiaal voor de beide aangrenzende gebieden en de wellicht geheel eenige vertrouwdheid, die de schrijver met deze eigenaardige literatuur bezit, maakt hem tot de aangewezen persoon, om haar opbrengst ook verder algemeen bekend en bruikbaar te maken.

Over de wijze, waarop in het thans verschenen deel de stof bewerkt is, kan niets dan goeds gezegd worden; het boek is volledig; het is goed geschreven en goed gedocumenteerd; dat de schrijver niet overal tot de primaire bronnen is teruggegaan, is, gezien den ontzaglijken omvang van de stof, te begrijpen. Als wenschen voor een volgend deel zou men slechts kunnen noemen een meer uitvoerig zaakregister en vooral: op grootere schaal geteekende figuren en deze dan geplaatst op uitslaande vellen; nu is het een voortdurend bladeren en het is niet eens altijd gemakkelijk te zien, welk figuurtje uit den overvloed men eigenlijk hebben moet.

C. de Waard. *L'expérience barométrique; ses antécédents et ses explications.* Thouars (Deux-Sèvres) 1936. 195 blz.

Wanneer men een werk als dit leest, is men geneigd, zich af te vragen of het misschien niet gewenscht zou zijn, dat de leerboeken der physica zich maar liever onthielden van het meedeelen van historische bijzonderheden, wanneer ze toch niet in staat blijken, een indruk te geven van het zeer ingewikkelde verloop, dat de ontwikkeling van onze inzichten in de natuurverschijnselen in vrijwel alle gevallen heeft gehad. In duizend boeken kan men lezen, dat Torricelli door zijn bekende proef met het kwik in de glazen buis als eerste het bestaan van een luchtdruk en de mogelijkheid van een vacuum aantoonde en dat dit laatste vooral hierom zoo belangrijk was, omdat men vóór hem steeds had aangenomen, dat de natuur een afschuw van het luchtledige (horror vacui) had. Dat is een voorstelling, die vrijwel gemeen goed is van allen, die ook maar eenige natuurwetenschappelijke scholing hebben genoten, maar wat blijft er eigenlijk van over, wanneer men van volkomen deskundige zijde eens over de ware toedracht van de zaak wordt ingelicht?

Dat ze ontoereikend was, wist natuurlijk wel ieder, die zich ooit met de historie van de physica heeft beziggehouden, maar zal iemand hebben kunnen vermoeden, dat ze zoo primitief en onbeholpen naast de feiten zou komen te staan?

Hoe dit zij, de belangstellende kan zich voortaan over dit onderwerp op uiterst betrouwbare wijze laten voorlichten door het hier aangekondigde werk, waarin een van de vooraanstaanden onder de tegenwoordige beoefenaren van de geschiedenis der natuurwetenschappen als een soort van bijproduct van zijn omvangrijke historische onderzoekingen met de volledigheid en nauwgezetheid, die zijn werkwijze kenmerken, het barometrisch experiment behandelt, de reacties bespreekt, waartoe het aanleiding heeft gegeven en ter inleiding nagaat, wat men van den Griekschen tijd af over de hierbij optredende kwesties heeft gedacht.

Hoewel het laatste onderzoek als inleiding bedoeld is, vormt het toch zeker niet het minst belangrijke deel van de studie. De schrijver geeft hier een zeer uitvoerig overzicht van de bonte verscheidenheid van opvattingen, die elkander in den loop der tijden over de fundamenteele kwesties van plenum en vacuum en wat daarmede

samenhangt, hebben afgewisseld; dat vereischte een diepgaande kennis van omvangrijke, hiervoor benoodigde literatuur, die zoowel op physisch en medisch als op philosophisch terrein te zoeken is. Ieder, die met het Oeuvre van den schrijver eenigszins vertrouwd is, zal weten, hoe ver zijn beheersching daarvan gaat; toch zal men, dit werk lezend, telkens weer verstomd staan over de ongeloofelijke verscheidenheid van meerendeels zeer moeilijk op te sporen geschriften, die hij voor zijn doel heeft moeten bestudeeren.

De schrijver heeft door dit nieuwe werk een belangrijke bijdrage tot de kennis van de geschiedenis der physica geleverd, die zijn vorige publicaties op waardige wijze aanvult.

L. de Launay. *Correspondance du grand Ampère.* 2 vol. Paris (Gauthier Villars) 1936. 826 blz.

Ter gelegenheid van den honderdsten terugkeer van den sterfdag van André—Marie Ampère (10 Juni 1836) verscheen deze mooie editie van de briefwisseling, die de beroemde Fransche wis- en natuurkundige met zijn familie, zijn vrienden en zijn wetenschappelijke relaties heeft gevoerd. Zij vervangt de ontoereikende vroegere uitgave, die door Mme Cheuvreux verzorgd was, blijft echter wel als complement de verzameling van brieven over philosophische onderwerpen vereischen, die B. St. Hilaire tot stand heeft gebracht (*Philosophie des deux Ampère.* [2]Paris 1870).

Het bronnenmateriaal, dat de brieven opleveren, zal in sterkere mate kunnen strekken tot verdieping van de kennis van Ampère's persoonlijkheid, dan tot scherpere belichting van zijn wetenschappelijke figuur, die, wat zijn physisch werk betreft, door de editie van zijn verhandelingen over electro-dynamica door Joubert (*Collection de Mémoires relatifs à la Physique.* II en III. Paris. 1885—87) vrijwel is komen vast te staan en die, wat de overige wetenschappelijke praestaties aangaat (ze lagen, zooals men weet, op velerlei gebied) nog steeds op behandeling wacht. In de brieven is betrekkelijk weinig sprake van wetenschappelijke onderwerpen al vormt de hier voor het eerst volledig gedrukte correspondentie met Davy, Faraday en de la Rive wel een belangrijke aanwinst voor de geschiedenis der physica. Zij doen hem veel meer als mensch dan als geleerde zien en ze onthullen nog veel duidelijker dan de vroeger reeds gepubliceerde fragmenten al hebben gedaan,

welk een diep ongelukkig mensch (door huiselijke omstandigheden, door godsdienstige twijfelingen, maar vooral door innerlijke onrust) de bij zijn leven reeds met uiterlijke eerbewijzen overladen en na zijn dood van een onaantastbaar voortleven in het geheugen der menschheid verzekerde schepper van de electrodynamica gehad heeft.

De uitgave is verlucht met interessante afbeeldingen, portretten, facsimiles en derg. Zij vormt een schoone bijdrage tot de herdenkingsfeesten, die dit jaar in Frankrijk gevierd werden.

Clemens Thaer. *Die Elemente von Euklid.* Buch VII—IX. *Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben.* Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften No. 240. Leipzig 1935.

De Duitsche vertaling van Euclides is door dit deeltje weer een schrede dichter tot haar voltooiïng genaderd. Tot bijzondere opmerkingen bestaat geen aanleiding.

J. Mahrenholz. *Anekdoten aus dem Leben deutscher Mathematiker.* Math. Phys. Bibliothek. Reihe I. No. 18. Leipzig (Teubner) 1936. iv en 44 blz. R.M. 1.20.

Dit deeltje van de bekende Mathematisch-Physikalische Bibliothek van de firma Teubner bevat een aantal anecdoten over de wiskundigen Riese, Stifel, Kepler, Weigel, Leibniz, Euler, Lambert, Kästner, Gauss, Abel, Steiner, Weierstrass en Schellbach. Men kan betwijfelen, of Euler, Abel en Steiner er wel in thuis hooren. Het werkje is niet van veel belang.

Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World. Translated into English by Andrew Motte in 1729. The translation revised, and supplied with an historical and explanatory appendix, by Florian Cajori. University of California Press. Berkeley, California, 1934. XXXV en 680 blz.

Het monumentale boekwerk, waardoor de Universiteit van Californie een lievelingswensch van wijlen Prof. Florian Cajori in vervulling heeft doen gaan, bevat een herziening van een Engelsche vertaling der *Principia,* die Andrew Motte in 1729 naar de derde

editie maakte, aangevuld en toegelicht met een ruim 50 compres gedrukte bladzijden omvattenden commentaar.

De tekst van het beroemde werk, waarvan de lectuur ook voor onzen tijd nog zoozeer van belang is (is niet de ernstige studie van het systeem van Newton eerst mogelijk geworden, sedert we het niet meer als de uiting van de absolute en definitieve waarheid beschouwen, zooals ook de kritische studie van Euclides pas is ontstaan, toen men ook niet-Euclidisch over de ruimte kon denken?) is hierdoor gebracht binnen het bereik van iederen lezer, die werkelijk wil weten — en niet slechts van anderen napraten — wat Newton eigenlijk gedaan heeft. Voor de bestudeering van de proposities en hare bewijzen kan de vertaling, die betrouwbaar en duidelijk is, het oorspronkelijke volkomen vervangen; voor een discussie van de axiomatische grondslagen der mechanica zal het raadplegen van den Latijnschen tekst uiteraard onvermijdelijk blijven, omdat hier de vertaling gewoonlijk reeds een interpretatie is.

Bij de ook in het Engelsch nog altijd zeer moeilijke lectuur van de *Principia* zullen de noten van een zoo deskundigen gids als Prof. Cajori was, ongetwijfeld sterken steun kunnen verleenen. Men zou alleen kunnen wenschen, dat hij zijn voorlichting vaker had gegeven. Het is niet steeds duidelijk, waarom hij hier zoo uitvoerig uitleg geeft, terwijl hij ginds, waar het niet minder noodig zou zijn, den lezer aan zijn lot overlaat. Dit bezwaar geldt gelukkig voor een Nederlandschen lezer slechts weinig; de commentaar op de *Principia,* die H. J. E. Beth in 1932 het licht deed zien, verleent hem doorloopend de hulp, die Cajori slechts hier en daar heeft willen geven.

KORRELS.

V. Voor zoover ik weet is er geen algemeen aanvaarde manier voor het aangeven der doorgangspunten van lijnen in de beschrijvende meetkunde. Ik heb de volgende notatie bedacht, die mij zelf goed voldoet en den leerlingen weinig last veroorzaakt; de *k*-de projectie van het *i*-de doorgangspunt der lijn *a* wordt aangegeven door A^i_k. Letters, waarvan de bovenindex en onderindex niet gelijk zijn, zooals A^1_2, A^2_1, A^3_2, staan dan steeds bij punten eener as.

J. H. S.

VI. Wanneer men een z.g. netwerk van een veelvlak maakt, komt een punt A, dat niet gelegen is in het tot teekenvlak gekozen zijvlak, in de teekening zoovele malen voor, als men vlakken, waarin dat punt ligt, neerslaat in het teekenvlak. Dit aantal is in sommige gevallen vrij groot, zoodat een netwerk een niet gering aantal punten A kan bevatten. Men kan deze punten onderscheiden door toevoeging van twee indices, elk voorstellende een punt van de doorsnede van het teekenvlak met het neergeslagen vlak. Zoo stelt A_{PQ} voor het punt A neergeslagen met het vlak APQ (P en Q punten van het teekenvlak). Zijn A en B punten buiten het teekenvlak, P, Q, R en S punten erin, dan zijn de lijnstukken $\overline{A_{PQ}B_{PQ}}$ en $\overline{A_{RS}B_{RS}}$ congruent met het lijnstuk $\overline{AB}$ der afgebeelde ruimtefiguur, en dus ook onderling congruent. Evenzoo $\overline{A_{PQ}P}$, $\overline{A_{PR}P}$ en $\overline{AP}$.

Deze notatie is niet bruikbaar bij de netwerken van prismamantels met meer dan drie zijvlakken, en dergelijke figuren, waarin een vlak wordt neergeslagen na wenteling om meer dan éene lijn.

J. H. S.

VII. In de meeste mij bekende schoolboeken over stereometrie komen bij de behandeling van cylinders en kegels eenige beschouwingen over raakvlakken voor, die gegeven worden voor cylinder- en kegelvlakken in het algemeen. Dit heeft twee bezwaren: 1o. blijkt bij nader onderzoek, dat de kern van het bewijs gelegen is in de

toepassing van niet geformuleerde en dus ook niet bewezen limietstellingen, en 2o. zijn de eigenschappen van zulke oppervlakken met willekeurige richtlijn zoo weinig bepaald, dat men, ook met een volledig arsenaal van limietstellingen, niets bewijzen kan. Daar de beschouwingen bovendien geen toepassing vinden, behooren zij m.i. te worden weggelaten.

J. H. S.

VIII. Waarom eenvoudig, als het ingewikkeld kan?

De formule van la Place voor de voortplantingssnelheid van het geluid in gassen wordt in de meeste leerboeken geschreven in de vorm:

$$v = \sqrt{\frac{P}{s} \cdot \frac{c_p}{c_v} \cdot (1 + \alpha t)} \qquad (1)$$

waarin P de druk in dynes en

s het gewicht van 1 cc gas bij de heerschende druk en 0° C is.

Deze formuleering maakt het noodig er speciaal op te wijzen, dat v slechts schijnbaar van P afhangt.

Waarom wordt de oorspronkelijke vorm:

$$v = \sqrt{\frac{P}{s} \cdot \frac{c_p}{c_v}} \qquad (2)$$

waarin P de druk in dynes en

s het gewicht van 1 cc gas bij de heerschende druk en temperatuur is,

niet geheel herleid tot:

$$v = \sqrt{\frac{B_n}{s} \cdot \frac{c_p}{c_v} \cdot (1 + \alpha t)} \qquad (3)$$

waarin B_n de normale barometerstand in dynes en

s het s.g. van het gas is?

Is het misschien, omdat tegelijk met (1) een geliefd strikvraagje verloren zou gaan?

E. T. Steller.

BOEKBESPREKING.

G. Dupont, Cours de chimie industrielle.
Tome I. Généralités, les combustibles. 184 pp., 121 fig, 17 × 25 cm. Gauthier—Villars. 1936. 35 frs.
Tome II. Les industries minérales. 337 pp., 142 fig., 17 × 25 cm. Gauthier—Villars. 1936. 55 frs.

Het nieuwe werk van Dupont is een voorbeeld van de duidelijke en overzichtelijke Fransche samenvattingen. De beide hier genoemde deelen zullen aangevuld worden met een deel over metallurgie en legeeringen en twee deelen over de organische industrie. Dit werk is bedoeld als een leerboek voor den student aan de Fransche Universiteiten en is ontstaan uit de colleges door Dupont zelf gegeven. Als zoodanig is het zeker een zeer goede uitgave; het is ten zeerste toe te juichen, dat een samenvatting van de principes en methoden der chemische industrie is ontstaan, die niet tracht volledig te zijn. Immers in dat geval verliest men zich in details, die het overzicht belemmeren en een algemeene orientatie onmogelijk maken. Zoo dit boek in Holland dan niet als leerboek gebruikt zal worden, de chemische student, die belangstelling voor de techniek bezit, zal deze uitgave, die door de lage prijs voor ieder bereikbaar is, ten zeerste op prijs stellen, temeer, daar de litteratuur-citaten de weg tot dieper studie open laten. Het is echter jammer, dat practisch alleen Fransche publicaties genoemd zijn.

Het eerste deel begint met de fabrieksinstallatie (64 pp.), waaronder de algemeene werkmethoden en de daarbij benoodigde apparatuur begrepen is; daarop volgen de brandstoffen met hun verwerking, gebruik, waarde-bepaling, analyse-methoden etc.

Het tweede deel is geheel gewijd aan de toepassingen van de anorganische chemie. Alle groote industrieën zijn hierin besproken en van physisch-chemische zijde belicht. Hoewel gelukkig niet naar volledigheid is gestreefd, zijn vele interessante problemen opgeworpen, waardoor de bruikbaarheid als bron voor een algemeene orientatie sterk is gestegen.

Wij kunnen slechts hopen, dat de resteerende deelen spoedig en in dezelfde trant zullen verschijnen. Den Hollandschen chemicus kan dit werk ten zeerste aanbevolen worden. Dr. H. W. Herreilers.

BEHANDELING VAN DE CENTRALE BOTSING MET BEHULP VAN DIAGRAMMEN

DOOR

A. J. STARING.

In hetgeen volgt worden alleen de eenvoudigste gevallen van botsing besproken; botsingen, waarbij rotaties een rol spelen, blijven buiten beschouwing.

1. *Vergelijkingen voor de rechte centrale botsing.*

De oplossing van het vraagstuk: de snelheden der botsende lichamen A en B na een rechte centrale botsing te berekenen, komt neer op het opstellen van twee vergelijkingen, waarin die eindsnelheden als onbekenden voorkomen. De eerste vergelijking geeft geen moeilijkheden, want uit de hypothese van de gelijkheid van actie en reactie volgt, dat de totale hoeveelheid beweging constant is:

$$m_A v_A + m_B v_B = c \qquad (1)$$

waarin v_A en v_B, (de snelheden van A en B op eenzelfde tijdstip), algebraïsche grootheden zijn en tijdens de botsing als veranderlijken beschouwd moeten worden. c is positief, negatief of nul, en stelt de totale hoeveelheid beweging bij het begin van de botsing voor.

De tweede vergelijking ligt niet zo voor de hand. Men komt er niet zonder zich het botsingsproces min of meer in bijzonderheden voor te stellen. Gelijk bekend, leiden twee manieren tot het doel, die beide met een verdeling van de botsingsduur in twee tijdvakken beginnen; de scheiding wordt gevormd door het tijdstip, waarop

$$v_A = v_B \qquad (2)$$

De grootte van deze gemeenschappelijke snelheid (v_{AB}) is uit (1) te berekenen.

1e manier. Men neemt aan, dat de snelheidstoename van een der lichamen in het tweede tijdvak een gegeven fractie e ($o \leqq e \leqq 1$) van die in het eerste tijdvak bedraagt. Uit (1) volgt dan, dat hetzelfde voor het andere lichaam geldt. De gevraagde eindsnelheden v_{A2} en v_{B2} zijn dus te berekenen uit het volgende stel vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} (m_A + m_B)\, v_{AB} &= m_A v_{A1} + m_B v_{B1} \\ v_{A2} - v_{AB} &= e\,(v_{AB} - v_{A1}) \\ v_{B2} - v_{AB} &= e\,(v_{AB} - v_{B1}) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

waarin v_{AB} als hulpgrootheid is te beschouwen.

2e manier. Men toont aan, dat in het eerste tijdvak de totale kinetische energie vermindert, en dat hij in het tweede tijdvak weer toeneemt (m.a.w. dat hij aan het einde van het eerste tijdvak de kleinst mogelijke waarde heeft). *Men neemt aan,* dat in het tweede tijdvak een fractie e^2 van de in het eerste tijdvak verloren kinetische energie gerestitueerd wordt. De berekening verloopt dan als volgt:

Men bepaalt eerst v_{AB} met behulp van de vergelijking

$$(m_A + m_B)\, v_{AB} = m_A v_{A1} + m_B v_{B1}. \qquad (4)$$

Het energieverlies in het eerste tijdvak bedraagt

$$\tfrac{1}{2}\, m_A v^2_{A1} + \tfrac{1}{2}\, m_B v^2_{B1} - \tfrac{1}{2}\,(m_A + m_B)\, v^2_{AB}.$$

Invoering van de berekende waarde van v_{AB} geeft na enige herleiding voor dit energieverlies

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}(v_{A1} - v_{B1})^2$$

hetgeen steeds positief is.

Voor de eindsnelheden geldt de vergelijking

$$(m_A + m_B)\, v_{AB} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2} \qquad (5)$$

en de energiewinst in het tweede tijdvak bedraagt

$$\tfrac{1}{2}\, m_A v^2_{A2} + \tfrac{1}{2}\, m_B v^2_{B2} - \tfrac{1}{2}\,(m_A + m_B)\, v^2_{AB},$$

hetgeen te herleiden is tot

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}\,(v_{A2} - v_{B2})^2.$$

Ook dit is steeds positief.

Uit de veronderstelling omtrent de hoeveelheid gerestitueerde energie volgt dan

$$(v_{A2} - v_{B2})^2 = e^2 (v_{A1} - v_{B1})^2$$

of

$$v_{A2} - v_{B2} = \pm e (v_{A1} - v_{B1}).$$

Een onderzoek van het teken is nodig. Vóór de botsing naderen de lichamen elkaar, nà de botsing verwijderen ze zich van elkaar. Is dus $v_{A1} > v_{B1}$, dan moet $v_{A2} < v_{B2}$, waaruit volgt, dat alleen het minteken juist is.

$$v_{A2} - v_{B2} = - e (v_{A1} - v_{B1}). \qquad (6)$$

Uit de drie vergelijkingen (4), (5) en (6) of uit de twee vergelijkingen

uit (4 en 5) $\quad m_A v_{A2} + m_B v_{B2} = m_A v_{A1} + m_B v_{B1}$

(6) $\quad v_{A2} - v_{B2} = - e (v_{A1} - v_{B1})$ $\quad$ (7)

kan men de eindsnelheden berekenen.

(7) is uit (3) af te leiden door eliminatie van v_{AB}; de twee stellen vergelijkingen (3) en (7) zijn dus gelijkwaardig, m.a.w. in beide heeft e dezelfde betekenis.

Vergelijkt men nu de twee manieren, dan komt men tot de volgende conclusies.

Van epistemisch standpunt bezien verdient (3) verreweg de voorkeur boven (7), want de vergelijkingen (3) volgen direct uit de gemaakte veronderstelling, terwijl (6) slechts na een tamelijk omslachtige bewerking daaruit te voorschijn komt.

Ook van wiskundig standpunt bekeken is (3) te verkiezen, omdat voor elk der onbekenden een afzonderlijke vergelijking gegeven wordt; de oplossing van (7) is ingewikkelder.

Plaatst men zich echter op een natuurkundig standpunt, dan is tegen de 1e manier het bezwaar in te brengen, dat niet duidelijk is, hoe men op de gedachte komt, dat e niet groter dan 1 kan zijn. Hier is de 2e manier in het voordeel, want als in de mechanica-les de behandeling van de botsing begint, zijn de leerlingen enigszins met arbeidsvermogen vertrouwd, en de wet van het behoud van mechanische energie is reeds ter sprake gekomen. De veronder-

stelling: $e^2 \leqq 1$ (2e manier), staat daardoor méér in direct verband met de ervaring dan de veronderstelling $e \leqq 1$ (1e manier).

Wie ongevoelig is voor dit argument zou als uitgangspunt voor een 3e manier de vergelijking (6) kunnen nemen, die, in woorden gebracht, luidt:

De verhouding der snelheden van A t.o.v. B vóór en ná de botsing is gelijk aan $-e$.

Wil men echter het uitgangspunt van de 2e manier behouden (en m.i. is daar alles voor te zeggen), dan doet zich de vraag voor, of de omslachtige bewerkingen, die tot de vergelijking (6) leiden, niet vermeden kunnen worden, en of dan niet op eenvoudige wijze de vergelijkingen (3) kunnen worden afgeleid.

Dit nu is te bereiken door een grafische behandeling.

2. *Grafische voorstelling van een rechte centrale botsing.*

Men stelt de vergelijkingen (1) en (2) grafisch voor met behulp van een assenstelsel, waarbij

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2} m_A} \,.\, v_A \qquad\qquad y = \sqrt{\tfrac{1}{2} m_B} \,.\, v_B.$$

Vergelijking (1) gaat dan over in:

$$\sqrt{2m_A} \,.\, x + \sqrt{2m_B} \,.\, y = c \tag{I}$$

en wordt voorgesteld door een rechte lijn met richtingscoëfficiënt $-\sqrt{\dfrac{m_A}{m_B}}$. In fig. 1 is verondersteld, dat c positief is.

Vergelijking (2) gaat over in

$$\frac{x}{\sqrt{\tfrac{1}{2} m_A}} = \frac{y}{\sqrt{\tfrac{1}{2} m_B}} \tag{II}$$

en wordt voorgesteld door een rechte lijn door de oorsprong, met richtingscoëfficiënt $\sqrt{\dfrac{m_B}{m_A}}$. De lijnen staan dus loodrecht op elkaar.

Het bijzondere van dit diagram is, dat, indien de „bewegingstoestand" der beide lichamen op zeker tijdstip wordt aangegeven door èen punt T („toestandspunt"), het kwadraat van de voerstraal (OT) de totale kinetische energie voorstelt:

$$(OT)^2 = x^2 + y^2 = \tfrac{1}{2} m_A v^2_A + \tfrac{1}{2} m_B v^2_B = E_{kin}\,.$$

Tijdens de botsing verplaatst zich het toestandspunt T, maar

het moet op de lijn I blijven. Stel, dat bij het begin van de bòtsing T samenvalt met P. Op het eind van het 1e tijdvak is T in Q gekomen (snijpunt der lijnen I en II). Uit de figuur blijkt, dat dan

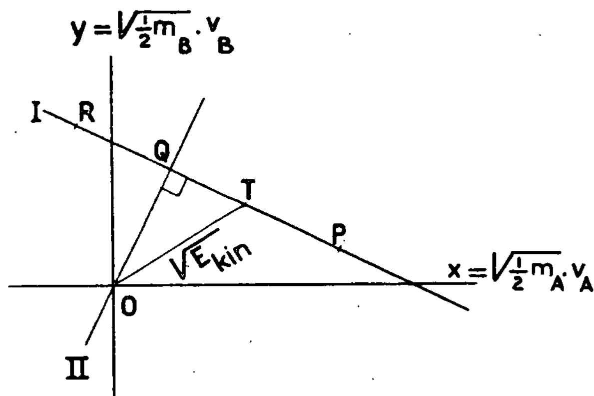


Fig. 1.
Grafische voorstelling van een rechte centrale botsing.
(QR) = e . (PQ).

de kinetische energie de kleinst mogelijke waarde heeft. De vermindering der kinetische energie in het 1e tijdvak wordt voorgesteld door $(OP)^2$ — $(OQ)^2$, dus door $(PQ)^2$.

Indien er een tweede tijdvak is (bij veerkrachtige botsing dus), dan zullen de snelheden nog verder veranderen, en de kinetische energie neemt weer toe. De vraag is slechts, hoever deze restitutie gaat. Stel, dat R de eindtoestand weergeeft; het is duidelijk, dat P en R aan weerszijden van Q moeten liggen. De gerestitueerde kinetische energie wordt dan voorgesteld door $(QR)^2$.

Men neemt nu aan, dat

$$(QR)^2 = e^2 \ (PQ)^2$$

of

$$(QR) = e \ (PQ)$$

Door de punten P, Q en R op de assen te projecteren ziet men, dat voor elk der lichamen de snelheidstoename in het tweede tijdvak de fractie e is van die in het eerste tijdvak. Daaruit volgen dan de vergelijkingen (3).

Bijzondere gevallen.

a. Bij een volkomen veerkrachtige botsing is

$$(QR) = (QP).$$

b. In het geval van gelijke massa's maken de lijnen hoeken van 45° met de assen. Is de botsing volkomen veerkrachtig, dan blijkt uit de figuur (fig. 2), dat de lichamen hun snelheden ruilen.

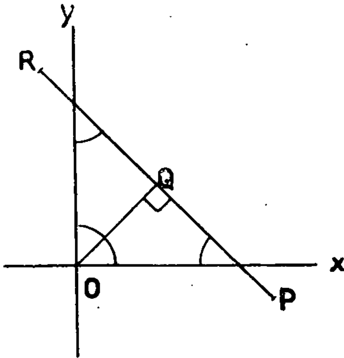


Fig. 2.
Volkomen veerkrachtige, rechte centrale botsing van twee gelijke massa's.

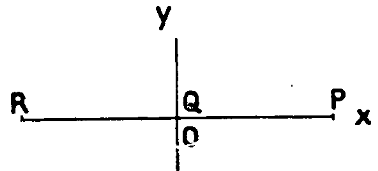


Fig. 3.
Volkomen veerkrachtige, rechte botsing van een lichaam tegen een wand

c. In het geval van botsing van een lichaam A tegen een vaste wand B is de richtingscoëfficiënt van lijn I nul. Uit fig. 3 volgt, dat dan bij volkomen veerkrachtige botsing de snelheid alleen van teken verandert.

Uit fig. 1 is ook nog het volgende af te leiden:

Zal bij een volkomen of nagenoeg volkomen onveerkrachtige botsing van een lichaam A tegen een stilstaand lichaam B ($v_{B1} = o$) het verlies aan kinetische energie naar verhouding gering zijn (heiblok en heipaal, hamer en spijker) dan volgt dadelijk uit de figuur, dat de lijn I steil moet lopen, dus m_A groot moet zijn t.o.v. m_B. Wil men een naar verhouding groot verlies aan kinetische energie hebben (smeden), dan moet de helling van lijn I gering, en dus m_A klein t.o.v. m_B zijn.

3. *Scheve centrale botsing.*

Gelijk bekend, projecteert men hierbij de snelheden op de lijn, waarlangs de krachten werken, en past op deze projecties de uitkomsten toe, die voor een rechte centrale botsing gelden. De projecties op een lijn, loodrecht op de krachtrichting, veranderen niet.

4. *Vectordiagram voor een scheve centrale botsing.*

Om een goed overzicht te krijgen is het nuttig van de scheve

centrale botsing een vectordiagram te maken, dat dan als een generalisatie van de onder 2 behandelde grafische voorstelling opgevat kan worden. Voor de leerlingen lijkt mij dit echter te veel van het goede.

Tijdens de botsing der lichamen A en B (stelsel zwaartepunt Z) geldt de vectorvergelijking:

$$m_A \, . \, \bar{v}_A + m_B \, . \, \bar{v}_B = (m_A + m_B) \, . \, \bar{v}_Z = \bar{c}$$

waarin $\bar{c}$ een onveranderlijke vector is, in fig. 4 en 5 voorgesteld door het lijnstuk CD. $m_A \, . \, \bar{v}_A$ en $m_B \, . \, \bar{v}_B$ zijn veranderlijke vectoren. In het diagram wordt het beginpunt van $m_A \, . \, \bar{v}_A$ steeds in C gelegd, en het eindpunt van $m_B \, . \, \bar{v}_B$ in D. Het eindpunt van $m_A \, . \, \bar{v}_A$ en het beginpunt van $m_B \, . \, \bar{v}_B$ vallen dan samen. Tijdens de botsing verplaatst zich dit gemeenschappelijke punt („toestands-

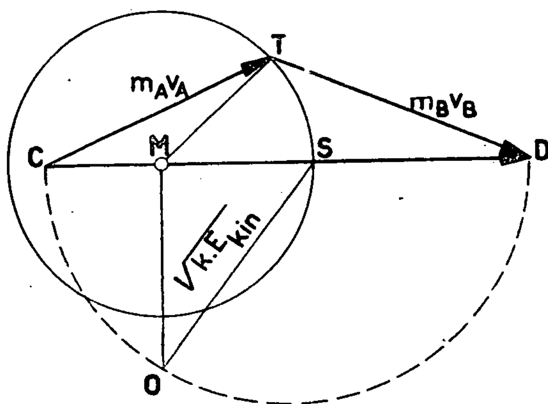


Fig. 4.
(CM) : (MD) = $m_A : m_B$
Cirkel voor constante E_{kin} bij behoud van hoeveelheid beweging (middelpunt M)

$$k = \frac{2 m_A m_B}{m_A + m_B}.$$

punt" T) langs een lijn PR (fig. 5), die evenwijdig is aan de krachten, die de lichamen op elkaar uitoefenen. Wij zullen eerst veronderstellen, dat deze lijn ligt in het vlak van $\triangle$ CPD.

De kinetische energie van het stelsel.

Evenals bij de rechte centrale botsing speelt bij de scheve centrale botsing de verandering van de kinetische energie een rol.

In fig. 1 was het kwadraat van de lijn OT een maat voor de kinetische energie. Wij zullen thans nagaan op welke wijze in het vectordiagram de kinetische energie voorgesteld wordt (fig. 4).

Men heeft:

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}\, m_A v^2{}_A + \tfrac{1}{2}\, m_B v^2{}_B$$

of

$$E_{kin} = \frac{(m_A v_A)^2}{2m_A} + \frac{(m_B v_B)^2}{2m_B}.$$

Het is nu nodig de meetkundige plaats der punten T te bepalen, die toestanden aangeven met dezelfde kinetische energie.

Daarvoor is dus

$$\frac{(CT)^2}{2m_A} + \frac{(DT)^2}{2m_B} = \text{een constante.}$$

Deze meetkundige plaats is een cirkel (cirkel voor constante kinetische energie), welks middelpunt M zodanig op CD gelegen is, dat

$$(CM) : (MD) = m_A : m_B.$$

Het bewijs, dat deze cirkel de meetkundige plaats is, kan men gemakkelijk afleiden uit de stelling van Stewart. Deze geeft:

$$(MT)^2 = \frac{2m_A m_B}{m_A + m_B}\left(\tfrac{1}{2}\, m_A v_A{}^2 + \tfrac{1}{2}\, m_B v^2{}_B\right) - (CM)\,.\,(MD)$$

$$= k\,.\,E_{kin} - (MO)^2$$

$$k\,.\,E_{kin} = (MT)^2 + (MO)^2 = (OS)^2.$$

In fig. 4 is dus het kwadraat van (OS) een maat voor de kinetische energie.

Verandering der kinetische energie tijdens de botsing.

Bij de verplaatsing van het toestandspunt T langs PR (fig. 5) kan T niet buiten de cirkel met middelpunt M en straal MP komen, omdat volgens hypothese de kinetische energie niet groter kan worden dan hij oorspronkelijk was. T verplaatst zich dus binnen die cirkel, waarbij eerst de kinetische energie vermindert. Hij is zo klein mogelijk, als T in Q is gekomen. Het energieverlies sinds het begin van de botsing is dan

$$\frac{1}{k}\,(MP)^2 - \frac{1}{k}\,(MQ)^2 \text{ of } \frac{1}{k}\,(PQ)^2.$$

Het blijkt bovendien, dat in de toestand Q de snelheden van beide lichamen gelijke en gelijkgerichte projecties hebben op de lijn, waarlangs de krachten werken. De projecties der vectoren

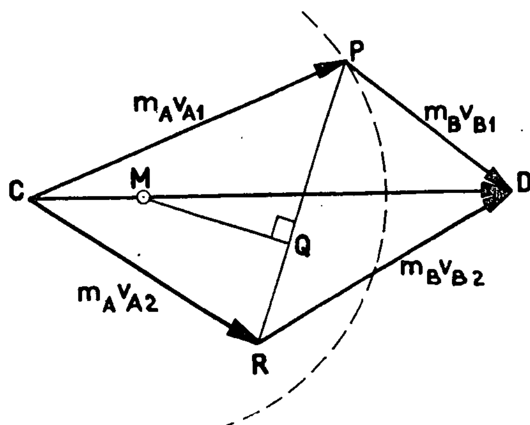


Fig. 5.
Vectordiagram voor een scheve centrale botsing
(CM) : (MD) = $m_A : m_B$
(QR) = e. (PQ)

$\overline{CQ}$ en $\overline{QD}$ op PR, die ook hoeveelheden beweging voorstellen, zijn n.l. gelijk aan die van de lijnstukken CM en MD, en deze verhouden zich als $m_A : m_B$; hieruit volgt, dat de projecties der snelheden gelijk zijn. De lichamen zijn elkaar dan zo dicht mogelijk genaderd (grootste vormverandering).

Is er nu een tweede tijdvak (veerkrachtige botsing), dan neemt de kinetische energie weer toe. Wordt een fractie e^2 van de verloren kinetische energie gerestitueerd, dan wordt de toestand nà de botsing aangegeven door het punt R, waarbij

$$\frac{1}{k}\,(QR)^2 = e^2 \frac{1}{k}\,(PQ)^2$$

of

$$(QR) = e\,(PQ)$$

Voor de volkomen veerkrachtige botsing is

$$(QR) = (PQ)$$

of ook

$$(MR) = (MP)$$

Het punt T is dan weer op de oorspronkelijke cirkel voor constante kinetische energie gekomen.

Uit figuur 5 blijkt verder, dat voor elk der lichamen de gelijkgerichte snelheidsveranderingsvectoren in de twee tijdvakken zich verhouden als 1 : e; voor het lichaam A zijn deze snelheidsveranderingen n.l. $\frac{\overline{PQ}}{m_A}$ en $\frac{\overline{QR}}{m_A}$, voor B zijn zij $\frac{\overline{QP}}{m_B}$ en $\frac{\overline{RQ}}{m_B}$.

Opmerking.

Bovenstaande beschouwing geldt ook als PR niet in één vlak ligt met CP en PD. In plaats van met „cirkels voor gelijke kinetische energie" krijgt men dan te maken met bollen, met M als middelpunt.

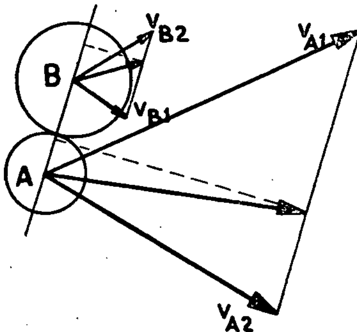


Fig. 6.
Botsing van twee bollen volgens fig. 5.

Als voorbeeld van de toepassing van het diagram van fig. 5 is in fig. 6 de botsing van 2 bollen A en B afgebeeld, waarbij ik mij aan dezelfde gegevens gehouden heb. Ook zijn de snelheden der bollen getekend op het tijdstip, dat het toestandspunt in Q gekomen is. Deze snelheidsvectoren hebben gelijke projecties op de verbindingslijn der middelpunten.

Bijzondere gevallen.

a. Bij een *rechte centrale botsing* liggen de punten P, Q en R op de lijn CD. M valt dan samen met Q. Het diagram is nu gelijkvormig met de grafische voorstelling in fig. 1 afgebeeld, indien men de lijn OM uit fig. 4 er bij tekent, en OD als x-as en OC als y-as neemt.

b. In het geval van *botsing van een lichaam A tegen een vaste wand B* valt M samen met C.

Wageningen, Juli 1936.

MONDELINGE STAATSEXAMENS A 1936

DOOR

Dr. H. C. SCHAMHARDT, Zeist.

I. MEETKUNDE.

1. Toon aan, dat men een bol kan beschrijven, die aan alle ribben van een regelmatig viervlak raakt. Bereken zijn straal, als de ribbe van het viervlak a is.
2. Construeer een driehoek, die gelijkvormig is met een gegeven driehoek ABC en waarvan de oppervlakte driemaal zo groot is als die van $\triangle$ ABC.
3. Bewijs, dat de afstand van een punt P van een cirkel tot een koorde, die niet door P gaat, middelevenredig is tussen de afstanden van dat punt tot de raaklijnen in de uiteinden van die koorde.
4. Construeer $x = \sqrt[4]{abcd}$, als a, b, c en d gegeven lijnstukken zijn.
5. Hoe construeert men een lijn, die twee kruisende lijnen a en b snijdt en twee andere kruisende lijnen c en d loodrecht kruist?
6. Gegeven een kubus $\frac{EFGH}{ABCD}$; men tekent in het verlengde grondvlak het vierkant DPQC en beschouwt de pyramide F. DPQC. Teken de doorsnijding van deze pyramide met het vlak DCGH en bereken de inhoud van het deel der pyramide, dat buiten de kubus ligt, als de ribbe van deze laatste a is.
7. In een regelmatig viervlak wordt een bol beschreven. Welk deel van de oppervlakte van de bol ziet men uit een hoekpunt?
8. Gegeven twee snijdende lijnen a en b en een lijn c, die a en b kruist. Hoe construeert men de lijn, die a en b snijdt en bovendien c loodrecht snijdt?
9. Van een afgeknotte vierzijdige pyramide is gegeven: het grondvlak ABCD in ware gedaante en de projectie op het grondvlak van de ribbe A_1B_1 van het bovenvlak, alsmede de hoogte. Maak de projectie van het bovenvlak af. Construeer vervolgens de ware gedaante van het opstaande zijvlak ABB_1A_1; daarbij de constructie verklaren met behulp van een ruimtefiguur.

10. In $\triangle$ ABC trekt men de hoogtelijnen AD en BE, die elkaar in H snijden; bewijs, dat $AH \times HD = BH \times HE$ is. Waarom liggen de punten A, B, D en E op een cirkel? Bewijs omgekeerd, dat dit laatste altijd het geval is, als gegeven is, dat $AH \times HD = BH \times HE$ is en de punten niet op een rechte liggen.
11. Construeer een raaklijnenvierhoek, die tevens koordenvierhoek is, als twee opeenvolgende zijden en de ingesloten hoek gegeven zijn.
12. Van een regelmatige vierzijdige pyramide TABCD is gegeven: de ribbe van het grondvlak is a, de opstaande ribbe $a\sqrt{2}$. Construeer de doorsnede van deze pyramide met het vlak door B loodrecht op de ribbe TD.
13. Teken in ware gedaante het zijvlak TAD van de in 12 genoemde pyramide. Het vlak van doorsnede snijdt TAD volgens een lijn. Hoe loopt deze? Hoe liggen de snijpunten van deze lijn met TA en TD? Bereken de stukken, waarin het lijnstuk TA verdeeld wordt.
14. $\triangle$ ABC ligt in het vlak van tekening en wordt om AB gewenteld. De projectie van C op het vlak van tekening is C_1. Construeer de hoek, waarover men de driehoek moet wentelen, opdat $\angle AC_1B = 90°$ is. Welke figuur beschrijft BC bij die wenteling; welke het punt C?
15. In cirkel M (straal R) trekt men een koorde AB, die gelijk is aan de zijde van de ingeschreven regelmatige driehoek. Men verbindt B met het midden C van AM en trekt deze lijn door tot hij de cirkel nogmaals in D snijdt. Bereken BD.
16. Een kegel is in een bol beschreven. De ronde oppervlakte van de kegel is anderhalf maal de ronde oppervlakte van het bolsegment, waarop hij staat. Hoe verhouden zich de hoogten van het bolsegment en van de kegel?
17. Construeer een hoek van 12°.
18. Van een regelmatige driezijdige pyramide is het netwerk gegeven. Construeer de afstanden van de hoogtepunten der opstaande zijvlakken tot elkaar en tot dat van het grondvlak.
19. In het viervlak ABCD zijn Z_1, Z_2, Z_3 en Z_4 de zwaartepunten van de zijvlakken. Hoe verhoudt zich de inhoud van viervlak $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$ tot die van het viervlak ABCD?

20. Verander een driehoek in een gelijkbenige met dezelfde tophoek en met gelijke oppervlakte.
21. Als in een viervlak twee hoogtelijnen elkaar snijden, snijden de andere twee elkaar ook. Bewijs dit.
22. In een viervlak DABC brengt men het vlak aan door het zwaartepunt van het grondvlak, evenwijdig aan de ribben BD en AC. Construeer de doorsnede en bereken de verhouding van de inhouden der delen, waarin dit vlak het viervlak verdeelt. Als D_1 de projectie is van de top op het grondvlak, welke hoek is dan groter, $\angle$ DAC of $\angle$ DAD_1? En waarom?
23. Van $\triangle$ ABC (basis AB) zijn de zijden AC $=$ 6, BC $=$ 8, AB $=$ 10. Bereken de afstand M_o M_i van de middelpunten van de om- en de ingeschreven cirkel. Wat is de meetkundige plaats van M_i als C de halve cirkel op AB doorloopt? Bewijs door berekening, dat $\angle$ $AM_iM_o = 90°$ is.
24. In het viervlak D.ABC brengt men een bol aan, die door A, B en C gaat en AD raakt. Hoe krijgt men het middelpunt? Waar snijdt deze bol DB en DC, als AD $=$ 6, DB $=$ 8, DC $=$ 9 cm is?
Noem de snijpunten met DB en DC opv. S en T. Bepaal de verhouding van de inhouden der delen, waarin vlak AST het viervlak verdeelt.
Neem L op AD en P op BC. Construeer het punt, waar PL het vlak AST snijdt.
25. In een parallelepipedum $\frac{EFGH}{ABCD}$ brengt men vlakken aan opv. door B, D en E, door B, D en G, door B, E en G en door D, E en G. Bewijs, dat de inhoud van het viervlak EGBD gelijk is aan het $^1/_3$ van de inhoud van het parallelepipedum.
26. In $\triangle$ ABC trekt men de hoogtelijnen AD en BE en verbindt E met D. Bewijs, dat opp. $\triangle$ CED $=$ ½ opp. $\triangle$ ABC is, als $\angle$ C $= 45°$ is. Laat ook zien, dat de omgeschreven cirkels van $\triangle$ CED en van vierhoek AEDB even groot zijn. Onder welke hoek snijden deze cirkels elkaar?
27. In een koordenvierhoek laat men uit het snijpunt der diagonalen loodlijnen neer op de zijden. Bewijs, dat de vierhoek, die de voetpunten tot hoekpunten heeft, een raaklijnenvierhoek is.

28. Verander een vierhoek in een gelijkbenige driehoek, met even grote oppervlakte, die één zijde van de vierhoek tot been heeft.
29. Een kegelmantel geeft bij ontwikkeling een halve cirkelschijf met straal a. Bereken de inhoud van de kegel; construeer de asdoorsnede. Welk deel van de oppervlakte van de ingeschreven bol ziet men uit de top? Breng door een gegeven lijn l, die door de top gaat, de beide raakvlakken aan de kegel. Construeer in ware grootte de hoek, die deze raakvlakken met elkaar maken.
30. Gegeven de vijfzijdige pyramide TABCDE; neem op AT het punt P, op BT het punt Q en op TD het punt R; construeer de doorsnede van het vlak PQR met de pyramide.
31. Van een driehoek zijn basis en tophoek constant. Bepaal de meetkundige plaats van het midden van het lijnstuk, dat de voetpunten van de hoogtelijnen op de opstaande zijden verbindt.
32. Leid de formule af voor de inhoud van de afgeknotte pyramide; van het afgeknotte driezijdige prisma; van de driezijdige pyramide.
33. Wat verstaat ge onder de uitdrukking: een lijnstuk is in uiterste en middelste reden verdeeld? Hoe berekent men het grootste stuk? En hoe wordt het geconstrueerd? In welke figuren komt deze gulden snede voor? Bewijs, dat de diagonalen van een regelmatige vijfhoek elkaar in uiterste en middelste reden verdelen.
34. Wat verstaat men onder een zwaartelijn van een viervlak? Welke eigenschap hebben de zwaartelijnen? Bewijs dit. Als van een viervlak gegeven zijn: het grondvlak in ware gedaante, de hoogte en het voetpunt van de hoogtelijn uit de top, construeer dan het netwerk en de afstand van een hoekpunt van het grondvlak tot het zwaartepunt van het viervlak.
35. Hoe brengt men door een punt P een vlak aan, dat evenwijdig loopt met een lijn l en met een vlak V een hoek α maakt?
36. Door een lijn buiten een bol brengt men vlakken, die de bol snijden. Wat is de meetkundige plaats van de middelpunten der doorsneden van die vlakken met de bol?
37. Evenwijdig aan de basis van een driehoek een lijn te trekken, zodat het afgesneden stuk van een der opstaande zijden, dat

aan de top grenst, tweemaal zo groot is als het afgesneden stuk van de andere opstaande zijde, dat aan de basis grenst.

38. Verdeel △ ABC in 2 (of 3) delen van gelijke oppervlakte door lijnen te trekken uit een punt P op een der zijden.

39. Construeer de doorsnede van een prisma met het vlak, bepaald door drie punten, die op de opstaande ribben gelegen zijn.

40. Men trekt door het hoekpunt B van hoek ABC twee lijnen BE en BF, zodat ∠ CBE = ∠ ABF is. Op BE neemt men een punt P en op BF een punt Q en trekt PT en QU loodrecht op BC en PR en QS beide loodrecht op AB. Bewijs, dat PT × QU = PR × QS is.

41. Bepaal de meetkundige plaats van de lijnen, die door een punt P gaan en twee kruisende lijnen l en m onder gelijke hoeken kruisen.

42. Van een vierzijdige pyramide zijn gegeven: het grondvlak in ware gedaante en drie van de opstaande ribben. Construeer het volledige netwerk. Neem vervolgens op drie van de opstaande ribben de punten P, Q en R en construeer de doorsnede van het vlak PQR met de pyramide, zowel in een ruimtefiguur als in ware gedaante.

43. Construeer een gelijkzijdige driehoek (een vierkant), waarvan de oppervlakte gelijk is aan de som van de oppervlakten van twee gelijkzijdige driehoeken (twee vierkanten).

44. De zwaartepunten van drie der zijvlakken van een viervlak worden op het vierde zijvlak geprojecteerd. Welk deel van de inhoud van het viervlak bedraagt de inhoud van het prisma, waarvan die zwaartepunten en hun projecties de hoekpunten zijn?

45. Construeer de doorsnede van een regelmatige vierzijdige pyramide met een vlak, dat gaat door het midden van de hoogtelijn op het grondvlak en de middens van twee opeenvolgende ribben van het grondvlak.

46. Een trapezium is in een halve cirkel beschreven (straal R). De middellijn is een der evenwijdige zijden, de andere is $2x$. Verder kan in dat trapezium een cirkel worden beschreven. Druk eerst de straal r van de ingeschreven cirkel uit in R en x en vervolgens x in R. Construeer ten slotte x.

47. Van een regelmatige driezijdige pyramide is de ribbe van het grondvlak a en de hoogte h. Bereken de straal van de omgeschreven bol; ook die van de ingeschreven bol.

48. In een regelmatige vierzijdige pyramide TABCD neemt men op TB het punt P, zodat TP : PB = 2 : 1 en Q op 't midden van TC. Men brengt het vlak aan door A, P en Q. Construeer de doorsnede en bereken de verhouding van de inhouden der beide delen, waarin dit vlak de pyramide verdeelt.

49. Van een viervlak D.ABC is het grondvlak een driehoek met zijden AB = 10, AC = 6, BC = 8 cm. De opstaande ribben maken hoeken van 60° met het grondvlak. Bepaal de inhoud en de straal R van de omgeschreven bol; eveneens de afstand, waarop de hoogtelijnen DD_1 en AA_1 elkaar kruisen.
(*Aanwijzing:* twee hoogtelijnen liggen in evenwijdige standvlakken).

50. Op twee kruisende lijnen zijn de lijnstukken a en x gegeven. De uiteinden daarvan zijn hoekpunten van een viervlak. Hoe groot moet x zijn, opdat de inhoud van dat viervlak gelijk aan p^3 zij, als p een gegeven lijnstuk is.

51. Van het prisma $\frac{\text{DEF}}{\text{ABC}}$ zijn de zijden van het grondvlak AB = 13, BC = 14, CA = 15 cm. Er kan een bol in en ook een bol om beschreven worden. Bereken de inhoud.
Neem vervolgens op DF het punt P, op DE het punt Q en op EB het punt R. Construeer de doorsnede van het vlak PQR met het prisma. Verbind F met een punt G op AB en bepaal het punt, waar FG het vlak PQR snijdt.

52. Gegeven is een gelijkbenige driehoek, waarin de lijn, die de voetpunten van de hoogtelijnen op de benen verbindt, de driehoek in twee gelijke delen verdeelt. Druk de oppervlakte van de driehoek uit in de basis a.

53. In △ ABC trekt men uit een punt P op AB twee lijnen PQ (Q op AC) en PR (R op BC) zo, dat PQCR een koordenvierhoek is. Bewijs, dat de vorm van △ PQR constant is. Laat nu P zich langs AB bewegen. Bewijs, dat de verhouding van de stralen der omgeschreven cirkels van △ ACP en △ BCP niet verandert, evenmin als de hoek, waaronder die cirkels elkaar snijden.

54. Construeer de doorsnede van een vierzijdige pyramide met een vlak, gaande door twee punten, die op overstaande opstaande ribben gegeven zijn en een punt, dat in het uitgebreide grondvlak gegeven is.

55. In viervlak ABCD staan de ribben door A twee aan twee loodrecht op elkaar. Bepaal in een stereometrische figuur de ligging van het middelpunt M van de omgeschreven bol. Toon vervolgens aan, dat het snijpunt van AM met vlak BCD het zwaartepunt is van $\triangle$ BCD.

56. Construeer een driehoek als gegeven zijn: de tophoek, de zwaartelijn uit de top, terwijl de basis $b = \sqrt[4]{p^4 - q^2\ r^2}$ is; p, q en r zijn gegeven lijnstukken.

57. Een rechthoekige driehoek TAM met zijden AM $= 6$, MT $= 8$, AT $= 10$, wentelt om TM als as en beschrijft dus een kegel. Verder beschrijft men een bol met T als middelpunt met straal TQ $<$ TM. Welk deel van de boloppervlakte ligt binnen de kegel? Bewijs, dat die oppervlakte gelijk is aan de ronde oppervlakte van een cylinder met dezelfde hoogte als het bolsegment en met een straal, die gelijk is aan de straal van de bol. Ontwikkel het zijdelingse oppervlak van de kegel in een plat vlak en construeer de middelpuntshoek van de cirkelsector, die daardoor ontstaat.

58. Teken een afgeknotte vierzijdige pyramide en daarin de diagonalen. Welke snijden elkaar en welke kruisen elkaar? Noem de top van de pyramide T, het bovenvlak van de afgeknotte pyramide PQRS en het grondvlak ABCD (P ligt op TA enz.). In welk geval snijden BS en CP elkaar? Als dit zo is, dan snijden AR en DQ elkaar ook. Neem PT : PA $= 3 : 2$; hoe groot is dan de verhouding van de inhouden van $\frac{\text{T}}{\text{PQRS}}$ en $\frac{\text{PQRS}}{\text{ABCD}}$?

59. Construeer een cirkel, die een cirkel met middelpunt M in een punt P raakt en bovendien een rechte lijn l raakt.

60. In het driezijdige prisma $\frac{\text{DEF}}{\text{ABC}}$ verbindt men A met het midden P van EF, B met het midden Q van DF en C met het midden R van DE. Bewijs, dat AP, BQ en CR door hetzelfde

punt S gaan. Hoe verhouden zich de delen, waarin deze lijnstukken elkaar verdelen?

61. Op een lijn neemt men RQ = QP en trekt door R en Q twee evenwijdige lijnen. Door P trekt men een lijn, die deze evenwijdigen snijdt in S en T. Gevraagd PST zo te trekken, dat opp. trap. QSRT = a^2 is (opp. van een vierkant met zijde a). Vervolgens vouwt men △ PQS om QS om over een hoek van 90°. Gevraagd van de pyramide $\frac{P}{QSTR}$ de hoek te construeren van de vlakken PQS en PRT, alsmede die van vlak QPR met vlak PST.

62. Van een driezijdige pyramide TABC is AB = 10, AC = 6, BC = 8 en BT = 11. De opstaande zijvlakken maken gelijke hoeken met het grondvlak. Bereken de inhoud van de pyramide en daarna de straal van de ingeschreven bol.

63. Door hoeveel punten is een bol bepaald? Hoe vindt ge het middelpunt? Construeer een bol, die door drie punten A, B en C gaat en een lijn l raakt.

64. Van een kubus $\frac{EFGH}{ABCD}$ is de ribbe a. Men neemt op EA een punt P, zodat AP = EP is en op EF punt Q, zodat QF = $\frac{1}{3}a$ is. Construeer de doorsnede van vlak PQG met de kubus en bereken de inhouden der delen, waarin dit vlak de kubus verdeelt.

65. Construeer △ ABC als gegeven zijn: de basis c, de tophoek C en een punt P van de deellijn van de tophoek.

66. Construeer $x = a\sqrt[4]{3}$, als a een gegeven lijnstuk voorstelt.

67. Bewijs, dat het vlak, dat aangebracht wordt in het midden van de afstand van twee kruisende lijnen en dat loodrecht staat op die afstand, elke verbindingslijn tussen twee punten van die kruisende lijnen middendoor deelt.

68. Construeer een koordenvierhoek ABCD, waarvan gegeven zijn: de beide diagonalen, hoek B en de hoogtelijn uit B van △ ABC. Neem vervolgens deze koordenvierhoek tot grondvlak van een pyramide, waarvan nog gegeven zijn de hoogte en het voetpunt van de hoogtelijn. Construeer het netwerk van die pyramide. Waarom kan om die pyramide een bol beschreven worden? Construeer de straal van die omgeschreven bol.

VOORBERICHT BIJ DE ACHTSTE DRUK VAN NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA I.

Enige gebruikers van de Nieuwe Schoolalgebra hebben wensen geuit omtrent het eerste stuk van het eerste deel. Daar hun open aanmerkingen ons voor het grootste deel niet ongegrond voorkwamen en ze voor een deel strookten met wat we zelf hadden opgemerkt, besloten we tot de radikale maatregel alles geheel opnieuw te bewerken; alleen wat vraagstukken zijn er blijven staan.

Het eerste letterrekenen is vereenvoudigd; opeenhoping van vaktermen is vermeden; deze komen gaandeweg. Begonnen wordt met enige vooroefening, voor de negatieve getallen komen; ter verklaring daarvan, tevens van de optelling, is de getallenrechte ingevoerd; deze betere manier echter heel voorzichtig aan. Eerst worden de leerlingen wat gewend aan rekenen met letters; de voorbeelden zijn zeer eenvoudig gehouden en worden behoorlijk voorbereid, zodat alle opgaven klassikaal kunnen worden behandeld.

Geleidelijk worden in beperkte mate letterexponenten ingevoerd.

Verdwenen zijn: de band als in $m - \overline{2k - 2}$; rangschikking van een niet homogene veelterm in verschillende letters; cyclische rangschikking (die komt later wel); de stroeve behandeling van „negatief en positief" (7e druk blz. 14 en 15), van optelling, aftrekking en vermenigvuldiging; grote vormen zijn ingekort en te bewerkelijke vraagstukken verwijderd.

Het hoofdstuk over de vermenigvuldiging en machtsverheffing was te gedrongen; de $9\frac{1}{2}$ bladzijden, de vraagstukken inbegrepen, zijn in de nieuwe bewerking tot $16\frac{1}{2}$ uitgedijd, gevolg van de geleidelijke opklimming en het opnemen van de eigenschappen I—IX. De moeilijkheden van blz. 30 in de vorige drukken komen nu pas op blz. 62; bovendien is de behandeling verbeterd.

In afwijking van de vorige drukken wordt elk stukje theorie over de merkwaardige producten nu onmiddellijk gevolgd door

vraagstukken; zie blz. 51—62; overigens ongewijzigd gelaten. § 51 is op verzoek er bij gekomen; het zal misschien ook anderen wel goed lijken; ons is het onverschillig, of die paragraaf er staat of niet.

De 6 bladzijden over de deling zijn er 9 geworden, vooral door de splitsing in moeilijkheden en het opnemen van de eigenschappen.

De eigenschappen I—XIII bij de vermenigvuldiging en I—IV bij de deling worden kort bewezen en ze worden dadelijk toegepast. Op scholen, waar men (o.i. ten onrechte) meent niets aan „rekenen" te moeten doen, is behandeling in de algebra-les volstrekt noodzakelijk.

Het artikel van Dr. J. H. Wansink in de elfde jaargang van „Euclides" getiteld *Delen door nul* heeft ons er toe gebracht de paragrafen 88 en 89 nauwkeurig te herzien en te bekorten.

Het eerste stuk van de Nieuwe Schoolalgebra I heeft door de nieuwe bewerking sterk gewonnen in didaktische waarde; we menen, dat daardoor de bruikbaarheid grotelijks is verhoogd.

Tot slot gaarne een woord van bijzondere dank aan de heren Dr. Beeger te Amsterdam, Dr. Bunt te Leeuwarden, Dr. Wansink te Arnhem, Sakkers te Utrecht en Nanning te Eindhoven voor hun opbouwende critiek. Bij voortduring houden we ons aanbevolen voor alles, wat dit schoolboek ten goede kan komen.

Juli 1936.

P. WIJDENES.

H. J. E. BETH.

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA.

Dit werk zou zijn titel niet mogen voeren, ware het niet, dat het sterk afweek van enige verouderde werken, die thans nog in gebruik zijn en die de verstening in het middelbaar en gymnasiaal onderwijs betekenen, zelfs versterken.

In het gehele werk hebben wij er naar gestreefd de techniek niet op de spits te drijven, de ingeklede vergelijkingen zo te maken, dat de leerlingen ze zelf kunnen vinden, hen niet afkerig te maken van de Algebra door hen te dwingen tot het werken met geweldige vormen, tot **algebra-cijferen, de laagst denkbare trap van beoefening der algebra.**

Het mag niet meer voorkomen, dat een jongmens met einddiploma de poorten der Hogeschool binnentreedt beladen **met ballast en sleurstof** als: Herleid

$$\frac{p}{\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}},\quad \sqrt{7\sqrt{5}-4\sqrt{15}},\ \sqrt[2/5]{a},\quad \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{-3}-\sqrt{-5}}$$

(om er maar een paar uit één hoofdstuk te noemen!), maar radeloos staat tegenover een vraagstukje als dit: „Als $f(x) = a + \frac{\log \log x}{\log b}$ is, bewijs dan: $f(x^b) = 1 + f(x)$". Wij zouden zo tien, twintig en meer voorbeelden kunnen opnoemen van *dufheden*, die op vele scholen het algebra-onderwijs als met een stoffig spinneweb omgeven. De Nieuwe School-Algebra bedoelt een grondige schoonmaak; deze brengt overal lucht en licht, en geeft een helder inzicht in de behandelde stof.

Men lette op:

1. de opruiming van onnutte, om niet te zeggen schadelijke, leerstof; de wortelvormen b.v. zijn geslonken tot minder dan 2 vel, de oneigenlijke machten tot 6 blz. (vlak voor de logarithmen);

2. Verplaatsing van de algebraische wortels in eenvoudige en zeer beperkte behandeling tot het eind van het derde deel.

3. de beperking van het cijferwerk, terwijl overal naar de eenvoudigste en handigste wijze van behandeling is gestreefd;

4. de verplaatsing van de merkwaardige quotienten tot daar, waar ze logisch behoren nl. bij de reststelling en tevens de uiterste

beperking; ze komen bij het Middelbaar en Gymnasiaal onderwijs te weinig voor om er lang bij stil te staan; hun toepassing ligt in de Getallenleer;

5. de behandeling van de reststelling na het functiebegrip en na oefeningen over het substitueren van constanten voor het argument, dus in het 3de deel.

6. de stevige behandeling van het functiebegrip en van de grafieken; wij hebben slechts een paar empirische grafieken gegeven, omdat we allen weten, dat ongeschoolden deze even goed kunnen lezen en maken als wij. Om de gehele doorvoering mogelijk te maken, is er een grafiekenschrift bij gemaakt en bovendien (dit in overleg met Dr. Schrek) in een twaalftal wandplaten de stof geschikt gemaakt voor klassikale behandeling. Wij verzoeken de leraren de behandeling van $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ vooral niet uit te breiden (de H.B.S. kan ze overslaan) en zeker niet door allerlei vraagstukken; o.i. moet de behandeling gericht zijn op het volgende: het bestaan van horizontale en verticale asymptoten, het begrip uiterste waarden, het doorlopen van een eindig interval, het doorlopen van een oneindig interval behalve een zeker eindig gedeelte, het eenzijdig doorlopen van een oneindig interval;

7. de onbepaalde vergelijkingen, die behandeld zijn, waar ze logisch behoren, eenvoudig en helder;

8. daar een goede behandeling van het irrationale getal in de tweede klas onmogelijk is, hebben wij er ons in II met een paar bladzijden van afgemaakt (in IV en IVβ wordt er wat meer aandacht aan besteed); in plaats van „rationaal maken" zeggen we dus „wortelvrij maken" immers rationaal heeft geen zin als irrationaal niet behandeld wordt.

9. Er is maar één vierkantsvergelijking nl. $ax^2 + bx + c = 0$ en één kwadratische functie $ax^2 + bx + c$; de bijzondere vorm $x^2 + px + q$ is dus opgeruimd.

10. de herhalingen in elk deel achterin; wij hebben deze bedoeld als vindplaats voor den leeraar om er sommen uit te zoeken voor proefwerk, niet om deze van het begin tot het eind te laten maken.

Men lette verder op:

11. het ontbreken van de permutaties en combinaties en de ontwikkeling van $(a + b)^n$, de rekenkundige reeksen van de tweede orde, de grensgebieden van de school-algebra; wij menen, dat die

weinig of niet onderwezen worden; acht de leraar een of ander daarvan nodig, dan geve hij een klein dictaat;

12. het niet opnemen van de opgaven der Eindexamens H.B.S. met 5-j. c.; deze staan in de bekende verzameling van Dr. Gerrits, zodat het niet nodig is, ze over te drukken.

Hiermee bevelen wij ons werk aan in de welwillende aandacht van de leraren bij het middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs; wij hopen en vertrouwen, dat deze arbeid mee moge werken **tot verhoging van het gehalte van ons algebra-onderwijs**; tevens verzoeken wij hun dringend ons hun op- en aanmerkingen niet te onthouden.

P. WIJDENES.

☞ Leraren, die de Nieuwe School-algebra en het Grafiekenschrift niet kennen, worden verzocht deze als pres. ex. aan te vragen bij den uitgever.

TWAALF WANDPLATEN MET GRAFIEKEN

Groot 56 × 66 cm.

Geplakt op karton per plaat	*f*	**0.90**
per **12** stuks	-	**9.50**
Geplakt op linnen met staven of met ringen	-	**1.00**
per **12** stuks	-	**10.50**
Verkleinde afdrukken voor de leerlingen	-	**0.40**
Geruite (2 cm) grafiekenplaten, om er zelf op te tekenen formaat 56 × 66 cm, 12 platen *f* **3.20,** 6 platen	-	**1.80**

☞ Mijn reiziger zal U gaarne deze platen op school of aan huis laten zien; een briefkaart aan mijn adres is voldoende om hem te ontbieden. Aan scholen, waar de Nieuwe School-algebra op de boekenlijst staat, wordt gratis een stel wandplaten (op karton geplakt) aangeboden.

P. NOORDHOFF.

WERKEN VAN P. WIJDENES.

LAGERE ALGEBRA, Leerboek voor de akte wiskunde l.o. en voor inrichtingen van onderwijs met uitgebreid wiskunde-programma.

1e deel — De algebraische grootheden en hun bewerkingen, 3e druk, 267 blz., 21 fig., geb.	*f*	**5.50**
2e deel — Vergelijkingen, functies, grafieken en reeksen, 3e druk, 483 blz., 152 fig., geb.	-	**8.50**
Antwoorden I 3e druk, II 3e druk	-	**2.00**

MIDDEL-ALGEBRA 611 blz., 200 fig., geb. . . . . . / **12.50**
Antwoorden 2e druk. . . . . - **2.00**

☛ De Lagere Algebra en de Middel-Algebra zijn tevens handleidingen voor de algebra voor het middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs.

VRAAGSTUKKEN OVER HOGERE ALGEBRA EN REKENKUNDE, 2e druk geb. . . . . / **4.00**
Antwoorden, 2e druk . . . . - **1.50**

UITGEWERKTE MONDELINGE EXAMENS HOGERE ALGEBRA, 2e druk, doorschoten met wit papier / **6.00**
Voor int. op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde - **3.50**

WERKEN VAN Dr. H. J. E. BETH.

INLEIDING TOT DE DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAAL-REKENING, met toepassingen op verschillende gebieden 417 blz. 137 fig. geb. . . . . / **11.50**

INLEIDING TOT DE NIET-EUCLIDISCHE MEETKUNDE OP HISTORISCHE GRONDSLAG, geb. . . . / **4.50**

NEWTON'S „PRINCIPIA" Twee delen, Geb. à . . / **4.25**

69. Bewijs, dat de lijnstukken, die de hoekpunten van het grondvlak van een afgeknotte driezijdige pyramide verbinden met de middens van de overstaande ribben van het bovenvlak, door één punt gaan. Als deze lijnstukken elkaar verdelen in reden van 3 : 1, welk deel is dan de inhoud van de afgeknotte pyramide van de inhoud van de pyramide, die ontstaat, als men de opstaande ribben verlengt?

70. Gegeven is een cirkel met middelpunt M en straal R. Van een andere cirkel met straal r ligt het middelpunt N op de omtrek van de eerste. In een punt A van cirkel N trekt men de raaklijn, die cirkel M in B en C snijdt. Bewijs, dat $NB \times NC = 2\,Rr$ is.

71. In de rechthoekige driehoek ABC ($C = 90°$) trekt men de zwaartelijnen AD en BE. Als $AD = \sqrt{73}$ en $BE = 2\sqrt{13}$ is, bereken dan de zijden, de straal van de om- en die van de ingeschreven cirkel van $\triangle$ ABC.

72. In een cirkel trekt men twee elkaar snijdende koorden AC en BD. Uit B trekt men $BQ \perp AC$ en uit C de lijn $CR \perp BD$. De lijn RQ snijdt de cirkel in E en F en de lijn CB in G. Bewijs, dat $GE \times GF = GQ \times GR$ is en dat $QR \,//\, AD$ loopt.

73. Wat is de meetkundige plaats van de toppen der driehoeken, die alle dezelfde basis en gelijke tophoeken hebben? Construeer deze meetkundige plaats. Leid daarna de meetkundige plaats af van de zwaartepunten van deze driehoeken.

74. Bewijs, dat de rechten, die een cirkel raken in de uiteinden van twee koorden, die loodrecht op elkaar staan, een koordenvierhoek vormen.

75. Als de middens van de zes ribben van een viervlak op één bolvlak gelegen zijn, bewijs dan, dat de overstaande ribben van het viervlak elkaar loodrecht kruisen.

76. Twee cirkels snijden elkaar. Uit een punt S, dat buiten de cirkels op de gemeenschappelijke snijlijn is gelegen, trekt men een snijlijn SAB door de ene en SCD door de andere cirkel. Waarom is nu ABDC een koordenvierhoek? Als we nu deze figuur projecteren op een ander vlak, dat niet evenwijdig is aan het vlak van tekening, en de projecties zijn A_1, B_1, D_1 en C_1, kan dan $A_1B_1D_1C_1$ ook een koordenvierhoek zijn?

Men vouwt nu het ene deel van de figuur om de gemeenschappelijke snijlijn over een hoek van 90° om. Construeer de straal van de bol, die door de beide cirkels bepaald is.

77. Van een driehoek een vierhoek af te snijden, waarom en waarin een cirkel beschreven kan worden.

78. Verdeel △ ABC in twee delen van gelijke oppervlakte door een lijn, evenwijdig aan een lijn *l*.

79. In een driezijdige pyramide T.ABC brengt men het vlak PQR // ABC aan, zodat TP : PA = 2 : 3. Men verbindt P met het midden D van BC; Q met het midden E van AC; R met het midden F van AB. Bewijs, dat PD, QE en RF door één punt gaan. Als de inhoud van pyramide S.PQR = 1 cm^3 is, bereken dan de inhoud van de hele pyramide. (*Aanwijzing*: bereken eerst de verhouding PS : SD en vergelijk daarna de inhoud van SPQR met TPQR, enz.).

80. In de rechthoekige △ ABC (∠ C = 90°) is D het voetpunt van de hoogtelijn uit C. Door D trekt men een lijn DQ (Q op CB) en loodrecht daarop DP (P op AC). Bewijs, dat de vorm van △ PDQ onveranderd blijft, als Q de zijde CB doorloopt. In welke stand is opp. △ PDQ = ½ opp. △ ABC?

81. In een gelijkbenig trapezium met evenwijdige zijden 5 en 3,2 kan een cirkel beschreven worden; bereken de straal van deze cirkel. Vervolgens beschouwt men dit trapezium als grondvlak van een pyramide, waarvan de hoogte 4,8 is. De top ligt loodrecht boven het middelpunt van de ingeschreven cirkel van het grondvlak. Construeer het netwerk; waarom kan in deze pyramide een bol beschreven worden? Construeer en bereken de straal van de ingeschreven bol.

82. Van △ ABC is AB = 21, BC = 20, AC = 13 cm. Op AB neemt men AD = 12 cm en beschrijft met CD als middellijn een cirkel, die AC in E snijdt. Bereken EC.

83. Van een viervlak is gegeven, dat twee hoogtelijnen door de middelpunten gaan van de omgeschreven cirkels van de zijvlakken, waarop zij loodrecht staan. Bewijs, dat die hoogtelijnen elkaar snijden.

84. Van viervlak T.ABC kruisen TA en BC elkaar loodrecht, terwijl TA met de vlakken ABC en TBC gelijke hoeken maakt.

De standhoek op de ribbe BC is 60°, TA = *a* en BC = *b*. Bereken de inhoud van het viervlak.

85. Hoe zoudt ge door een punt P een lijn construeren, die een lijn *l* loodrecht kruist en die evenwijdig loopt aan een vlak V?

86. Construeer een koordenvierhoek, waarvan gegeven zijn: een hoek, die beide diagonalen en de hoek, die de diagonalen met elkaar maken.

87. Van een pyramide is het grondvlak een ruit met een hoek van 60°; in de pyramide kan een rechte cirkelkegel beschreven worden. De ontwikkeling van het zijdelingse oppervlak van deze kegel geeft een cirkelsector met een middelpuntshoek van 120°. Bereken de inhoud van de pyramide. Heeft de pyramide ook een ingeschreven bol? En ook een omgeschreven bol?

88. Gegeven een cirkel; construeer een tweede cirkel met gelijke straal zo, dat de gemeenschappelijke koorde gelijk is aan de zijde van de ingeschreven regelmatige vijfhoek. Verbind de uiteinden van die koorde met het verst verwijderde punt van de tweede cirkel en beschouw deze figuur als een deel van het netwerk van een regelmatige vijfzijdige pyramide. Construeer de hoogte van deze pyramide.

89. Men verlengt de hoogtelijnen AD, BE en CF van △ ABC tot zij de omgeschreven cirkel opv. in P, Q en R snijden. Bewijs, dat bg AQ = bg AR, enz.; vervolgens, dat HD = DP, HE = EQ en HF = FR is. Wat zijn de hoogtelijnen van △ ABC in △ PQR? Waaraan herinnert dit? Welk verband is er tussen △ DEF en △ PQR? Wat weet ge van de omgeschreven cirkels van deze twee driehoeken? Noem de middens van de bovenste stukken der hoogtelijnen opv. K, L en M. Wat is er te zeggen van de omgeschreven cirkel van △ KLM?

90. Construeer een driehoek als gegeven zijn: de basis, de tophoek en de straal van de ingeschreven cirkel.

91. Bewijs, dat in een vierzijdige pyramide T.ABCD de lijnstukken, die de middens van de ribben van het grondvlak met de zwaartepunten Z_1, Z_2, Z_3 en Z_4 van de overstaande zijvlakken verbinden, door één punt gaan. In welke verhouding verdelen die lijnstukken elkaar? Welk deel is de inhoud van de pyramide $TZ_1Z_2Z_3Z_4$ van die van pyramide TABCD?

92. Construeer in △ ABC een gelijkzijdige driehoek, waarvan de hoekpunten liggen op de zijden van △ ABC en één zijde evenwijdig aan AB loopt.
93. Door een lijn *a* een vlak te brengen, zodat de projecties van twee kruisende lijnen *b* en *c* op dat vlak evenwijdig lopen.
94. Om een cirkel een gelijkbenig trapezium te beschrijven, waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van een vierkant met zijde *a*.
95. Twee cirkels snijden elkaar in A en B. Door A wordt een lijn getrokken, die de cirkels nogmaals snijdt in P en Q. Toon aan, dat de verhouding van BP en BQ standvastig is.
96. Op de verlengden van de benen BA en BC van een gelijkbenige △ ABC neemt men opv. de punten P en Q zo, dat $PA \times QC = AC^2$ is. Wat is de meetkundige plaats van het snijpunt S van AQ en CP?
97. Verdeel de oppervlakte van een driehoek in uiterste en middelste reden door een lijn evenwijdig aan de basis.
98. Van een bolsector is de bolvormige oppervlakte gelijk aan de kegelvormige oppervlakte. Druk de hoogte van het bolsegment uit in de straal van de bol.
99. Hoe construeert ge het middelpunt van de omgeschreven bol van een viervlak? Hoe het middelpunt van de ingeschreven bol? Heeft elk viervlak ook een bol, die alle ribben aanraakt? Als er zo'n bol is, hoe vindt ge dan het middelpunt? En aan welke voorwaarde voldoen dan de ribben van het viervlak?
100. In een cirkel trekt men twee onderling loodrechte stralen, MA en MB. P ligt op het verlengde van MB, Q op het verlengde van MA, terwijl AP en BQ elkaar op de cirkel snijden. Bewijs, dat $AQ \times BP = 2r^2$ is. (r is de straal).

II. ALGEBRA.

1. Bepaal a zodanig, dat de grafiek van $y = \frac{x^2 - 4x + a}{x(x - 4)}$ de X-as aanraakt. Na substitutie van de gevonden waarde van a de grafiek te tekenen.
2. De vorm $x^4 - ax^3 - (6a + 5b)\,x^2 + abx + 144$ is deelbaar door $x^2 + 6x + 8$. Bepaal a en b en ontbind daarna de vorm in factoren van de 1e graad in x.
3. Gegeven de vergelijking:

$$(a^2 + 2)\,x^2 + (a + 1)\,x + (a^2 - 4a) = 0.$$

Voor welke reëele waarden van a heeft het product van de wortels een uiterste waarde?

4. Bepaal een vergelijking van de 4e graad, die tot wortels heeft de kwadraten en de derde machten van de wortels van $x^2 + 3x + 1 = 0$.
5. Voor welke waarden van x is $\frac{2x + 10}{x - 3} > \frac{x + 11}{x - 4}$?
6. Toon aan, dat de vorm $x^2 - (m + 2)x + \frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{4}m + \frac{5}{4}$ voor alle reëele waarden van m en x positief is.
7. Gegeven de vergelijking $x^2 + mx + 2m - 14 = 0$. Voor welke waarde van m is de som van de kwadraten der wortels minimum?
8. Ontbind $a^{12} - b^{12}$ in factoren. Schrijf de uitkomst op van het quotient $\frac{a^{12} - b^{12}}{a^3 + b^3}$. Noem de merkwaardige quotienten en leid ze af.
9. Onderzoek de grafiek van $y = \frac{-2x + 3}{x^2 - 6x + 9}$.
10. Toon aan, dat de wortels van $x^2 - (3a + 4)\,x + 2a^2 + 5a - 4 = 0$ reëel zijn, als a reëel is.
11. Stel in één figuur grafisch voor: $y = (x - 2)\,(x - 4)$ en $y = \frac{1}{(x-2)\,(x-4)}$. Bepaal de uiterste waarden van beide functies en de coördinaten van de snijpunten der krommen.

12. De functie $y = ax^2 + bx - 42$ bereikt zijn maximum voor $x = -3$ en dit maximum is gelijk aan $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3+x^2-7x+2}{x^2-x-2}$.
Bepaal a en b en maak een grafiek van de functie.

13. Los x en y op uit: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x^3 - y^3 = 1 \end{cases}$

14. Bepaal m zo, dat de rechte $y = mx$ raakt aan de parabool $y = x^2 - 3x + 4$.

15. Los langs grafische weg x op uit:
$2^x = x^2 - 4x + 3$; ook uit $2^x = x^2 - 3x + 2$.

16. Gegeven de breuk $\frac{x^2 + (p - 2)\,x - p}{x^3 + (m + 2)x^2 - (8m + 2)x - 120}$.
De noemer is deelbaar door $x - 5$. Bepaal m en daarna de waarde van p, waarvoor de breuk te vereenvoudigen is. Noem en bewijs de reststelling.

17. De wortels van de vergelijking $x^2 + 21ax + 16b = 0$ zijn de derde machten van de wortels van de vergelijking $x^2 + ax + b = 0$. Bepaal a en b.

18. De uiterste waarde van $ax^2 + bx + c$ is 10; deze wordt bereikt voor $x = 5$. Deling van de vorm door $x - 7$ geeft tot rest -2. Bepaal a, b en c.

19. Gegeven de vierkantsvergelijking $x^2 - 4x + 7 = 0$. (wortels x_1 en x_2). Bepaal een vierkantsvergelijking, die $2x_1^2 + 3x_2^2$ en $3x_1^2 + 2x_2^2$ tot wortels heeft.

20. Symmetrische functies van de wortels van een vierkantsvergelijking. Afhankelijkheid en strijdigheid van 2 lineaire vergelijkingen met 2 onbekenden. (Ook grafisch).

21. Maak een grafiek van de functie $y = 2^x$. Oneigenlijke machten.

22. Bepaal a en b zodanig, dat de vergelijkingen
$x^2 + (a - 1)\,x + b - 1 = 0$ en $2x^2 + (3a - 2b)\,x + 4\,(a - b) = 0$ dezelfde wortels hebben.

23. Los x op uit:
$(17x^2 + 83x - 100)\,\{(x - 3)^{½} + (x + 2)^{½}\} = (17x^2 + 83x - 100)\,(3x + 4)^{½}$

24. Gegeven: $x^2y - x^2 - xy + x + y + 2 = 0$. Druk y uit als

functie van x en bepaal dan het teken van y, alsmede zijn uiterste waarden, wanneer x varieert van $-\infty$ tot $+\infty$.

25. Laat zien, dat in $2^x = 1/9$ x niet meetbaar kan zijn. Tussen welke grenzen ligt x?
26. Bepaal a zodanig, dat de wortels van de vergelijking $x^2 - (a+4)x + 5a - 6 = 0$ zich verhouden als $2:3$.
27. Van de vergelijking $x^2 + px + q = 0$ zijn de wortels x_1 en x_2. Bepaal een vierkantsvergelijking, die tot wortels heeft
$$\frac{x_1}{x_1+2} \text{ en } \frac{x_2}{x_2+2}.$$
28. Schets de grafiek van $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - x + 1}$.
29. Eveneens van $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8}$.
30. $x^{20} - 4x^{11} + 5x - 3$ wordt gedeeld door $x(x-1)(x+1)$. Bepaal de rest zonder de deling uit te voeren. (Denk om de algemene gedaante van de rest).
31. Voor welke waarden van x bestaat $\sqrt{x^2 - 3x - 10}$ niet? Dezelfde vraag voor $\sqrt{-x^2 + x + 30}$. Schrijf een wortelvorm op, die voor alle waarden van x bestaat. Bepaal $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 10} - \sqrt{x^2 - 3x - 10})$. Denk daarbij aan de herleiding van $\dfrac{1}{2 - \sqrt{3}}$.
32. Bepaal m zodanig, dat de breuk $\dfrac{x^2 + (m-3)x - 20}{x^3 - mx^2 - x + m}$ vereenvoudigd kan worden.
33. Voor welke waarden van a is voor alle waarden van x: $x^2 - (a-3)x - (a-3) > 0$?
34. In welk deel van het platte vlak liggen de punten, waarvoor $(y - x^2)(y - x - 1) > 0$ is?
35. Bepaal m zodanig, dat $x^2 - mxy - 6y^2 + (m+4)y - 1$ ontbonden kan worden in 2 factoren van de eerste graad in x en y. Welke zijn die factoren?
36. In welk geval is $\dfrac{ax + b}{cx + d}$ onafhankelijk van x?
Voor welke waarden van a is $\dfrac{(a-1)x + 3a + 1}{x + (a^2 + a + 1)}$ onafhankelijk van x?

37. Schets de grafiek van $y = \frac{2x^2}{x^2 - 2x + 1}$.
38. Voor welke waarden van x is $(x + 2)(2x - 5)(x - 4) < 0$?
39. Bewijs, dat $2^{6x+3} + 3^{4x+2}$ deelbaar is door 17.
40. Gevraagd een vergelijking samen te stellen van de 4e graad, die tot wortels heeft $3 - \sqrt{2}$ en $3 + \sqrt{2}$ en bovendien de imaginaire wortels van $x^3 - 1 = 0$.
41. Voor welke waarden van x ligt de waarde van de functie $y = 5^{\frac{1}{x^2 - x - 5}}$ tussen 1 en 5?
42. Voor welke waarden van x is $x + 4 < (x + 2)^2 < \frac{1}{2} x + 4$? Geef een grafische toelichting.
43. De uiterste waarden van $y = x^2 - (a + 2) x + 2a$ en $y = x^2 + ax + a - 1$ zijn gelijk. Bepaal a.
44. Voor welke waarde van a is de som van de derdemachten van de wortels van $x^2 - (a + 2) x + \frac{1}{3} a^2 + 2 = 0$ zo klein mogelijk?
45. $f(x) = f(x) - f(a) + f(a)$. Waarom is $f(x) - f(a)$ deelbaar door $x - a$? Wat is nu hiermee dus bewezen?
46. Gegeven van vergelijking $x^2 - (a + 3) x + (2a - 7) = 0$. Gevraagd een vergelijking samen te stellen van de vierde graad, waarvan twee wortels even groot zijn als die van de gegeven vergelijking, terwijl de beide andere wortels elk 1 groter zijn. Bepaal daarna voor welke waarde van a de som van de kwadraten der vier wortels minimum is.
47. Voor alle waarden van x geldt:

$$(p + 1) x^2 - 2 (p - 1) x + 3p - 3 < 0;$$

welke waarde moet p dan hebben?

48. Van de vergelijking $x^3 - ax^2 - 13x + 5a = 0$ is $x_1 = 5$. Bepaal a en vervolgens $x_2^3 + x_3^3$. (Reststelling).
49. Gegeven de vierkantsvergelijking $4x^2 - 2x + 1 = 0$ (wortels x_1 en x_2). Gevraagd wordt een vergelijking van de vierde graad te bepalen, die tot wortels heeft $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, x_1^3 en x_2^3.
50. Schets de grafiek van $y = \frac{x^2 - 2x}{x^4 + 4x + 4}$.
51. De vergelijkingen $x^3 - 3x^2 + 7x - 85 = 0$ en $2x^3 - 11x^2 + 10x - 25 = 0$ hebben een wortel gemeen. Los beide op.